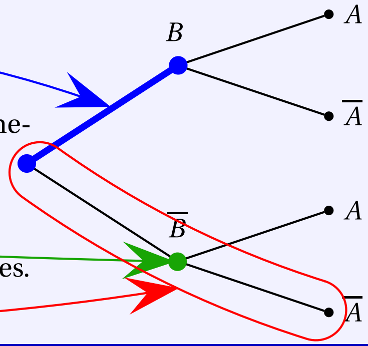
Probabilités et variable aléatoire

I Arbre de probabilité

Définition 1 Arbre de probabilité

Un arbre de probabilité est un schéma permettant de représenter une expérience aléatoire composée de plusieurs épreuves.

Vocabulaire



- ➔ Une branche est représentée par un segment qui mène à un événement.
- ➔ Un noeud est la jonction de plusieurs branches.
- ➔ Un chemin est l'événement réalisé en suivant des branches successives.

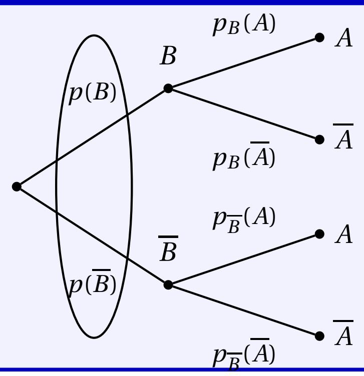
Exemple 1 Une urne contient 5 boules rouges et 5 boules bleues.
On tire successivement et avec remise deux boules dans l'urne
On note R l'événement « La boule tirée est rouge »
On note B l'événement « La boule tirée est bleue ».
Représenter cette expérience aléatoire par arbre de probabilité

Définition 2 Arbre pondéré

Un arbre pondéré est un arbre sur lequel chaque branche porte la probabilité de l'événement correspondant.

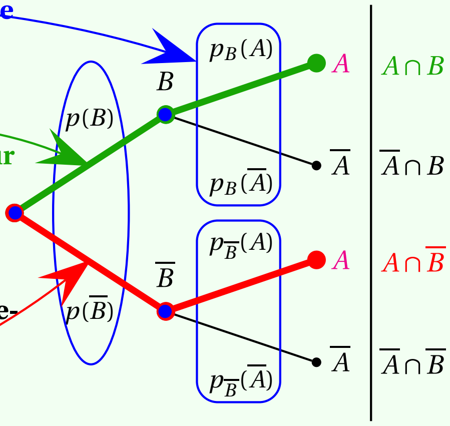
Rappel : on note $p_B(A)$ la probabilité que l'événement A ait lieu sachant que l'événement B a été réalisé. De plus on a :

$$p_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$



Propriété 1 Propriété d'un arbre pondéré

- **La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.**
  On a donc : $p_B(A) + p_B(\overline{A}) = 1$
- **La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées sur ses branches.**
  Pour notre exemple : $p(A \cap B) = p_B(A)p(B)$
- **La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.**
  $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$



Exemple 2 Un sac contient 2 boules bleues et 3 boules noires et 5 boules rouges. On tire une boule on note sa couleur on la remet et on retire une seconde boule dont on note aussi la couleur.
On note

- B : l'événement : « La boule tirée est bleue »
- N : l'événement : « La boule tirée est noire »
- R : l'événement : « La boule tirée est rouge »

1. Représenter cette situation avec un arbre de probabilité pondéré.
2. Quelle est la probabilité d'avoir une boule bleue puis une boule noire ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir eu une boule bleue et une boule noire (pas forcement dans cet ordre) ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu deux boules de la même couleur ?

II Variables aléatoires

Définition 3 Variable aléatoire

Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Ω est l'univers de l'expérience aléatoire
Une variable aléatoire X sur Ω est une fonction qui, à chaque issues de Ω, associe un nombre réel

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega_i & \mapsto & x_i \end{array}$$

L'ensemble des réels obtenus est l'ensemble des valeurs prises par X.
On notera $\{ X = x_i \}$ ou « $X = x_i$ » l'événement formé de toutes les issues associées au réel x_i

Exemple 3 On reprend l'exemple 2. On décide que l'on gagne 5 € lorsqu'on tire une boule bleue, 4 € pour une boule noire et 3 € pour une boule rouge.
On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage avec remise de deux boules associe la somme gagnée.

1. Définir par une phrase l'événement « $X = 9$ »
2. Quels sont les issues permettant de réaliser l'événement « $X = 9$ »
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X

Définition 4 Loi de probabilité

On considère une expérience aléatoire sur laquelle on a défini une variable aléatoire X.

La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque valeur de la variable aléatoire associe $p(X = x_i)$, la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$

En première, on représente généralement la loi de probabilité par un tableau

Valeurs prises par la variable aléatoire X : x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
Probabilité : $p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	...	$p(X = x_n)$	1

La somme des probabilités est égale à 1.

Exemple 4 On reprend l'exemple 3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

III Espérance

Définition 5 Espérance

On considère une expérience aléatoire sur laquelle on a défini une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donné par le tableau ci-dessous

Valeurs prises par la variable aléatoire X : x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
Probabilité : $p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

L'espérance mathématique de X, notée $\boldsymbol{E(X)}$ est définie par

$$\boldsymbol{E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \ldots + p_n \times x_n}$$

L'espérance correspond à la valeur moyenne de la variable aléatoire que l'on peut espérer lorsque l'on répète l'expérience un grand nombre de fois

Exemple 5 On reprend l'exemple 4, quelle est l'espérance de la variable aléatoire X ? Interpréter la valeur obtenue.