Devoir maison : exercices à rendre

Exercice 1 Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$

1. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 6x - 5$ donc $f'(x) = 5 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 6$ $\boxed{f'(x) = 15x^2 - 14x + 6}$
2. $f(x) = 5x^2 + 8$ donc $f'(x) = 5 \times 2x + 0$ $\boxed{f'(x) = 10x}$
3. $f(x) = 12x^2 - 8x^3 + 7x$ donc $f'(x) = 12 \times 2x - 8 \times 3x^2 + 7$ $\boxed{f'(x) = 24x - 24x^2 + 7}$
4. $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$ donc $f'(x) = 3 \times 2x - 12 \times 1 + 0$ donc $\boxed{f'(x) = 6x - 12}$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x^3 - 3x^2 - 0,5x + 15$

1. On veut démontrer que pour tout réel x $f(x) = 0,5(x-3)(x+2)(x-5)$.
   (a) Développer $(x-3)(x+2)$

$$((x)(-3))(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 6$$
$$= x^2 - x - 6$$

	x	-3
x	x^2	$-3x$
+2	$2x$	-6

   (b) en déduire le développement de $(x-3)(x+2)(x-5)$

$$(x-3)(x+2)(x-5) = (x^2 - x - 6)(x-5)$$
$$= x^3 - 5x^2 - x^2 + 5x - 6x + 30$$
$$= x^3 - 6x^2 - x + 30$$

	x^2	$-x$	-6
x	x^3	$-x^2$	$-6x$
-5	$-5x^2$	$5x$	30

   (c) En déduire le développement de $0,5(x-3)(x+2)(x-5)$ et vérifier que l'on obtient bien f (voir l'exercice 3 du DM précédent)
   $0,5(x-3)(x+2)(x-5) = 0,5(x^3 - 6x^2 - x + 30) = 0,5x^3 - 3x^2 - 0,5x + 15 = f(x)$

   donc $\boxed{f(x) = 0,5(x-3)(x+2)(x-5)}$

2. En déduire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 0,5(x-3)(x+2)(x-5)$. Les racines de f sont -2 ; 3 et 5

x	$-\infty$		-2		3		5		$+\infty$
$0,5$		+	|	+	|	+	|	+	
$x-3$		−	|	−	0	+	|	+	
$x+2$		−	0	+	|	+	|	+	
$x-5$		−	|	−	|	−	0	+	
$f(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

3. Déterminer f', la fonction dérivée de f

   $f(x) = 0,5x^3 - 3x^2 - 0,5x + 15$ donc $f'(x) = 0,5 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 0,5$ $\boxed{f'(x) = 1,5x^2 - 6x - 0,5}$

4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = 3$

   L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Dans cette question $a = 3$

   donc l'équation de la tangente est de la forme $y = f'(3)(x-3) + f(3)$. Calculer $f'(3)$ et $f(3)$

   $f(3) = 0,5(3-3)(3+2)(3-5) = 0$

   $f'(3) = 1,5 \times 3^2 - 6 \times 3 - 0,5 = -5$

   $y = -5(x-3) + 0$

   $= -5x + 15$

   L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 3$ est $y = -5x + 15$

Exercice 3 Déterminer le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x - 2$.

   $5x - 2 = 0$ si $5x = 2$ donc si $x = \dfrac{2}{5} = 0,4$

x	$-\infty$		$0,4$		$+\infty$
$5x-2$		$-$	0	$+$	

2. $f(x) = 3 - 4x$

   $3 - 4x = 0$ si $3 = 4x$ donc si $\dfrac{3}{4} = x$ donc si $x = 0,75$

x	$-\infty$		$0,75$		$+\infty$
$3-4x$		$+$	0	$-$	

3. $f(x) = -2x^2 + 4x + 16$. Indication : on pourra démontrer que $f(x) = -2(x-4)(x+2)$

   $-2(x-4)(x+2) = -2(x^2 + 2x + -4x - 8)$

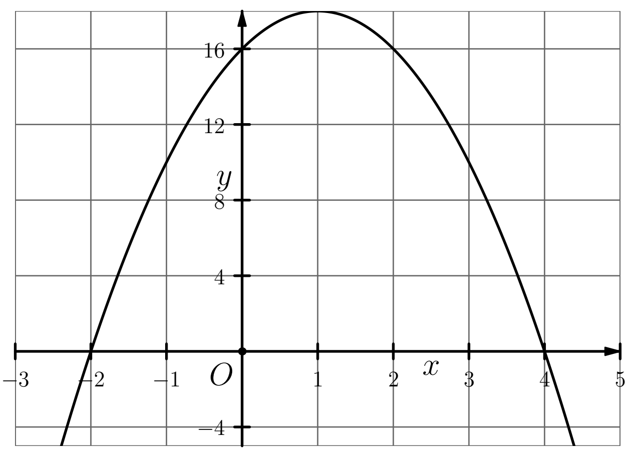
   $= -2(x^2 - 2x - 8)$

   $= -2x^2 + 4x + 16$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
$+2$	$2x$	-8

Donc $f(x) = -2(x-4)(x+2)$ les racines sont 4 et -2

avec $a = -2 < 0$ d'où l'allure de courbe ci-contre.

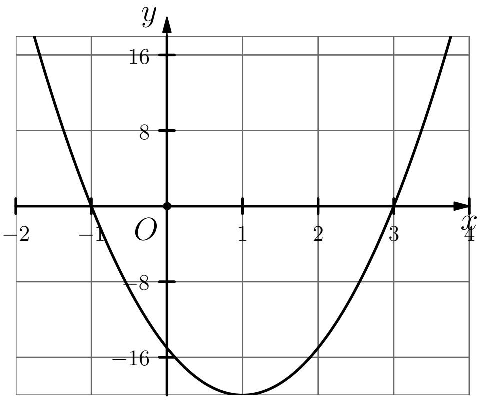


x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut aussi établir le signe de chaque facteur de f en fonction de x.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
-2		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. $f(x) = 5x^2 - 10x - 15$ Indication : calculer $f(-1)$ et $f(3)$.
$f(-1) = 5 \times (-1)^2 - 10 \times (-1) - 15 = 5 + 10 - 15 = 0$
$f(3) = 5 \times 3^2 - 10 \times 3 - 15 = 45 - 30 - 15 = 0$
f est une fonction polynôme du second degré ayant -1 et 3 comme racines avec $a = 5 \geq 0$. (Donc $f(x) = 5(x+1)(x-3)$)



x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	