Dérivation 2^{e} partie

I fonction dérivée

1 Définition

Définition 1 Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, telle que pour tout nombre réel x de I, le nombre dérivé $f'(x)$ existe.
Alors la fonction f est dérivable sur I et on appelle fonction dérivée de f la fonction, notée f', qui à tout x associe le nombre $f'(x)$

2 Dérivée des fonctions de références

Dérivé des fonctions de référence

Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalle de dérivabilité
$f(x) = c$ f est une constante	$f'(x) =$...........	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) =$...........	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) =$...........	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) =$...........	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) =$...........	$\mathbb{R}$

3 Opération sur les dérivées

Soit u et v deux fonctions définies et dérivable sur un intervalle I et soit k un réel .

Opération sur les dérivées

$u + v$	....
ku	....

a Cas d'un polynôme du second degré

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$. Calculer $f'(x)$

b Cas d'un polynôme du troisième degré

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^3 + 3x^2 - 4x + 6$. Calculer $f'(x)$

II Sens de variation

Dans cette partie, la fonction f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Théorème 1 Signe de la dérivée et sens de variation de f

① si pour tout $x \in I$ $f'(x) \geq 0$ alors ....

② si pour tout $x \in I$ $f'(x) = 0$ alors ....

③ si pour tout $x \in I$ $f'(x) \leq 0$ alors ....

Théorème 2 Sens de variation de f et signe de la dérivée f'

① Si la fonction f est croissante sur I alors pour tout $x \in I$ $f'(x)$.........

② Si la fonction f est constante sur I alors pour tout $x \in I$ $f'(x)$.........

③ Si la fonction f est décroissante sur I alors pour tout $x \in I$ $f'(x)$.........

Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,x^3 - 21\,x^2 + 60\,x - 6$ sur $[0\,;\,8]$.

1. Calculer $f'(x)$, la fonction dérivée de f.
2. Démontrer que $f'(x) = 6(x-2)(x-5)$
3. Dresser le tableau de signes de la fonction $f'(x)$ sur $[0\,;\,8]$
4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,8]$.

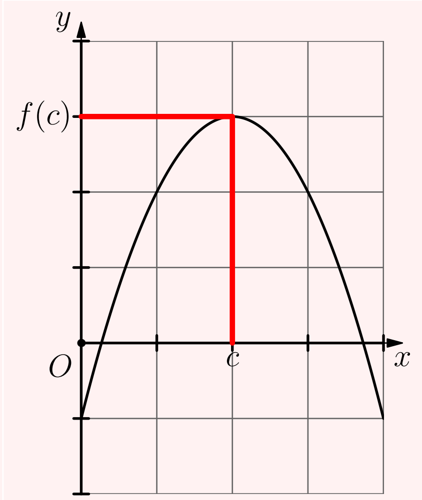
III Extremums d'une fonction

Théorème 3 Extremum d'une fonction

Soit f une fonction, de dérivée f', sur un intervalle $[a;b]$.
Si la dérivée s'annule en $x = c$, en changeant de signe, alors la fonction f admet en c un extremum (local)

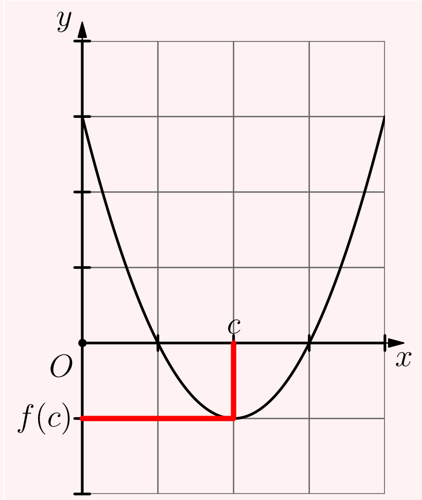
x	a		c		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(b)$

La fonction f admet un maximum local en $x = c$,



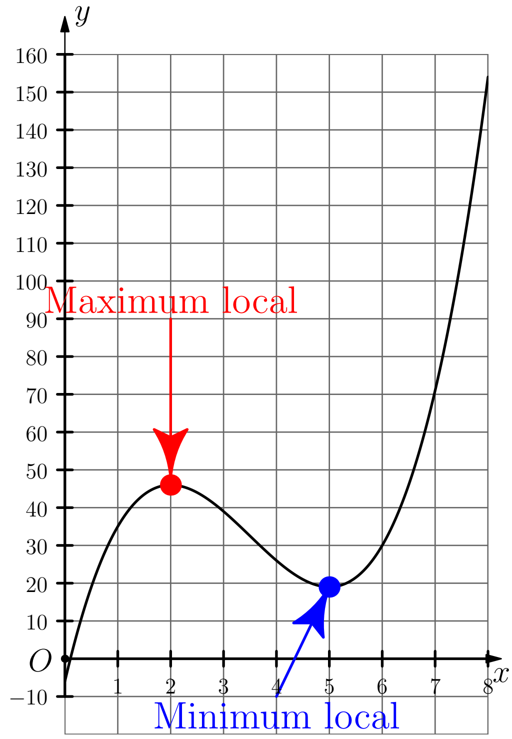
x	a		c		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$f(b)$

La fonction f admet un minimum local en $x = c$,



Il faut distinguer extremum global et extremum local

- ➔ Un extremum global est la plus petite valeur ou la plus grande valeur atteinte par la fonction f sur l'intervalle I sur lequel elle est définie
- ➔ un extremum local correspond à l'ordonnée du point de la courbe au « sommet d'une bosse » ou « au pied d'une vallée ».
- ➔ Si la fonction f est dérivable, alors en un extremum local, la dérivée s'annule, la courbe représentative admet une tangente horizontale



Exemple 2 On reprend l'exemple 1.

1. Déterminer le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$
2. Déterminer le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 8]$
3. Déterminer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$
4. Déterminer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 5]$

Une courbe peut présenter une tangente horizontale (la dérivée peut s'annuler en un point) sans que pour autant la fonction f présente d'extremum. C'est le cas pour la fonction cube