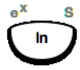
Logarithme népérien et exponentielle

I Le logarithme népérien

1 Présentation, Propriétés

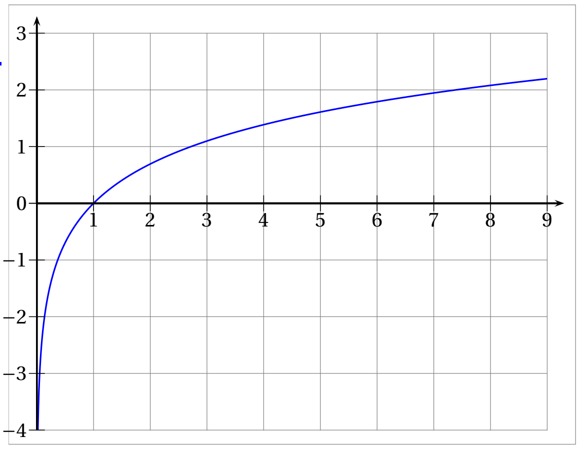
Dans cette partie nous allons voir les principales propriétés de la fonction logarithme népérien : touche  de la calculatrice ou la fonction LN du tableur.

Propriété 1 A retenir

- La fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$ *i.e.* pour $\ln(x)$ existe si ....
- $\ln(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

2 Tableau de variation, représentation graphique

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln(x)$	



L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de la fonction ln

3 Tableau de signes

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln(x)$	

4 Le nombre e

Définition 1 Le nombre e

On note e l'unique antécédent de 1 par la fonction ln on a donc $\ln(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

5 Propriété algébrique

Propriété 2 Propriétés algébriques

Soit a et b deux réels strictement positifs, soit n un entier relatif

$$\ln(a\cdot b) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\ln(a^n) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Exemple 1

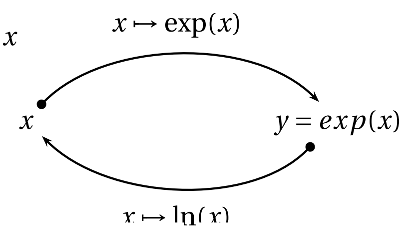
1. Déterminer le réel a tel que : $\ln(a) = \ln(6) + \ln(2)$
2. Déterminer le réel b tel que : $\ln(b) = \ln(15) - \ln(3)$

3. Démontrer que $\ln(8) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(16)$ est un entier
4. Soit f la fonction définie sur $[0\ +\infty[$ par $f(x) = 3\ln(2x+1) - 5x + 3$. Démontrer que $f(4) - f(1) = 3(\ln(3) - 5)$

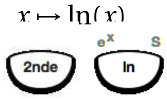
II La fonction exponentielle

1 Définition

Définition 2 La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction qui a tout réel x associe l'unique nombre y **strictement positif** vérifiant l'égalité $x = \ln(y)$



$$\begin{array}{llll} \exp: & \mathbb{R} & \mapsto &]0;+\infty[\\ & x & \rightarrow & y = \exp(x) \text{ tel que } \ln(y) = x. \end{array}$$

La fonction exponentielle est obtenue avec la calculatrice grâce à la combinaison de touches 

Propriété 3 Conséquences

- Pour tout réel x, $\exp(x)$...........
- $\exp(0)$ =...... ; $\exp(1)$ =......
- Pour tout réel x ; $\ln(\exp(x))$ =......
- Pour tout réel y strictement positif, $\exp(\ln(y))$ =......

2 Notation e^x

Introduction :

$$\begin{array}{rrcl} \text{On sait que pour tout entier } n; & \ln(e^n) & = & n \\ \text{Donc} & \exp(\ln(e^n)) & = & \exp(n) \\ \text{Donc} & e^n & = & \exp(n) \end{array}$$

Or la fonction exp est définie pour tout entier réel x, On convient donc de définir e^x lorsque x est réel, en étendant l'égalité précédente aux nombres réels, on obtient donc :

Propriété 4 Notation

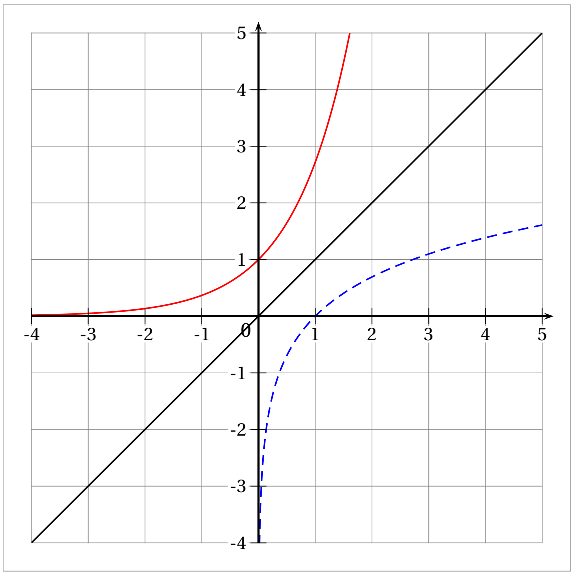
Pour tout réel x, $\exp(x)$ = ...

3 Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	

4 Tableau de signes

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	



L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $-\infty$

5 Relation fonctionnelle

Propriété 5 Relation algébrique

Soit a et b deux réels et soit n un entier relatif.

$$e^{a+b} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$e^{-a} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

$$e^{a-b} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

$$(e^{a})^{n} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Exemple 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5}{3+2e^{-3x}}$. Démontrer que $f(x) = \dfrac{5e^{3x}}{2+3e^{3x}}$.

III Résolution d'équations et d'inéquations

Théorème 1

soit a et b deux réels alors :

- $e^a = e^b$ si et seulement si $a.....b$
- $e^a \leq e^b$ si et seulement si $a.....b$
- $e^a < e^b$ si et seulement si $a.....b$

Théorème 2

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $a\ldots\ldots b$
- $\ln(a) < \ln(b)$ si et seulement si $a\ldots\ldots b$
- $\ln(a) \leq \ln(b)$ si et seulement si $a\ldots\ldots b$

Rappel :

On rappelle que les fonctions ln et exp sont strictement croissantes sur leurs ensembles de définitions et que

- Pour tout réel x ; $\ln(\exp(x)) = x$
- Pour tout réel y strictement positif, $\exp(\ln(y)) = y$

Exemple 3 On résout, sur $]0,5;+\infty[$, l'inéquation $3\ln(2x+1)+2>5$

$$\begin{aligned}
3\ln(2x+1)+2 &> 5\\
3\ln(2x+1) &> 5-2 = 3\\
\ln(2x+1) &> \frac{3}{3} = 1\\
\cancel{\exp}(\cancel{\ln}(2x+1)) &> \exp(1)\\
2x+1 &> e^1 = e\\
2x &> e-1\\
x &> \frac{e-1}{2}
\end{aligned}$$

Exemple 4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $2e^{5x-2}+3>5$

$$\begin{aligned}
2e^{5x-2}+3 &> 5\\
2e^{5x-2} &> 5-3 = 2\\
e^{5x-2} &> \frac{2}{2} = 1\\
\cancel{\ln}(\cancel{e}^{5x-2}) &> \ln(1) = 0\\
5x-2 &> 0\\
5x &> 2\\
x &> \frac{2}{5} = 0,4
\end{aligned}$$

Exercice 1 Résoudre sur l'intervalle I les équations ou inéquations suivantes :

1. $\ln(x)+1=0$ $I=]0;+\infty[$
2. $3\ln(2x-1)+2=8$ $I=]-0,5;+\infty[$
3. $\ln(3x+1)<0$ $I=\left]\frac{-1}{3};+\infty\right[$
4. $2\ln(4x-1)+1>3$ $I=\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$

Exercice 2 Résoudre les équations ou inéquations suivantes définie sur $\mathbb{R}$

1. $e^{3x+1}=5$
2. $4e^{3x}-5=-1$
3. $4e^{1-2x}+3\geq 7$
4. $4e^{5x-3}+2<0$

Equation :

① : ② : ③ (⋆) : ④ : ⑤ ⋆ :

Inéquation :

① : ② : ③ :

Activité de découverte de la fonction ln

Le but de cette activité est de découvrir les principales propriétés de la fonction logarithme népérien : ln en utilisant un tableur (ordinateur ou calculatrice)

1. (a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	-15	-5	-2	-0,4	0	0,6	1	5	10
2	$\ln(x)$									

   (b) Pour quelles valeurs du tableau, le logarithme népérien ne peut être calculé?

   (c) En utilisant les résultats observés précédemment, et en effectuant d'autres calculant le logarithme népérien d'autres valeurs, déterminer la bonne réponse :

   (a) la fonction ln est définie pour tout réel x.

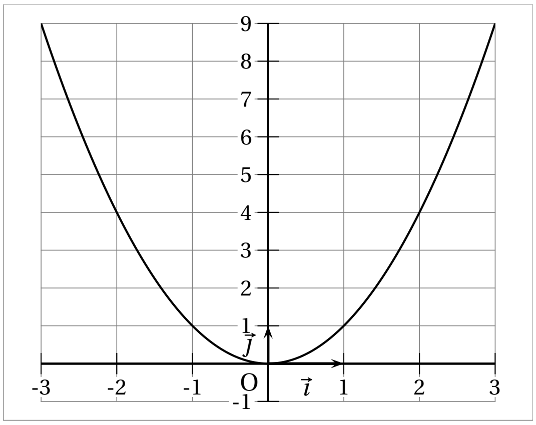
   (b) la fonction ln est définie pour tout réel x positif

   (c) la fonction ln est définie pour tout réel x strictement positif .

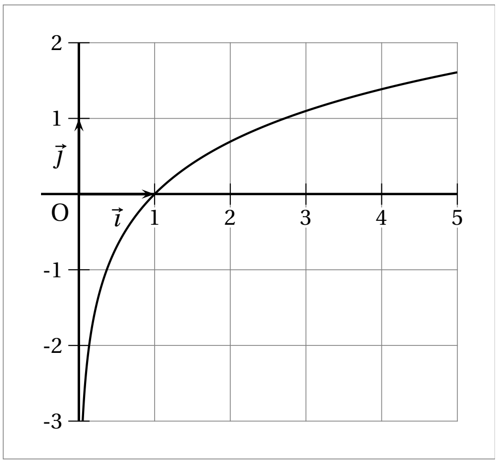
   (d) la fonction ln est définie pour tout réel strictement supérieur à $0,5$.

2. (a) Tracer, l'aide sur votre calculatrice ou d'un logiciel (geogebra par exemple) la courbe représentative de la fonction ln.

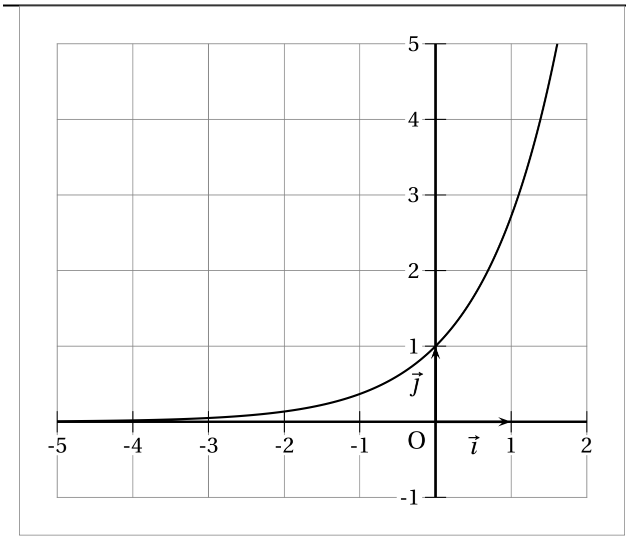
   (b) En déduire parmi les 4 représentations graphiques ci-dessous, celle de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien



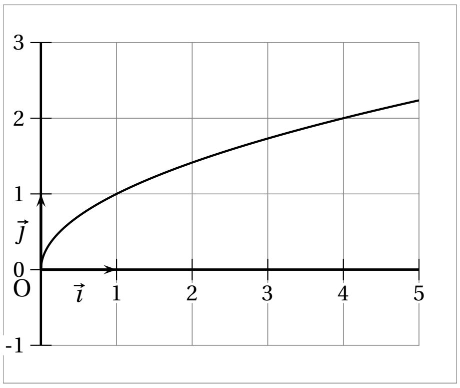
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

3. Déterminer le tableau de variation de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;\,+\infty[$

4. Déterminer le tableau de signe de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;\,+\infty[$

5. (a) compléter le tableau ci-dessous

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	$a \cdot b$	$\ln(a)$	$\ln(b)$	$\ln(a \cdot b)$	
2	0,5	2					
3	1	3					
4	2	4					
5	3	5					
5	5	8					

(b) Donner la formule entrée en C2.

(c) Donner la formule entrée en D2.

(d) a et b étant deux réels strictement positifs, quelle relation semble lier les réels $\ln(a)$, $\ln(b)$ et $\ln(a \cdot b)$?

6. (a) En admettant que la conjecture précédente est vérifiée, et en posant $b = a$, déterminer la relation qui lie $\ln(a)$ et $\ln(a^2)$.

(b) On souhaite généraliser cette relation pour cela compléter le tableau ci-dessous après avoir donné les formules que vous entrerez en B4 et en B5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a=	5							
2									
3	n=	1	2	3	4	5	7	9	10
4	$\ln(a^n) =$								
5	$n \times \ln(a)$								

(c) Après avoir essayer plusieurs valeurs de $a > 0$ voire même avoir modifier les valeurs des entiers naturels n, quelle formule semble lier $\ln(a^n)$ et $\ln(a)$

7. Compléter le tableau suivant :

	A	B	C	D
1	a	1/a	$\ln(a)$	$\ln(1/a)$
2	0,2			
3	2			
4	10			
5	15			

8. Soit a un réel strictement positif, quelle relation semble lier $\ln(a)$ et $\ln\left(\frac{1}{a}\right)$.

9. (a) compléter le tableau ci-dessous

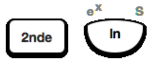
	A	B	C	D	E	F
1	a	b	$\frac{a}{b}$	$\ln(a)$	$\ln(b)$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)$
2	0,5	2				
3	1	3				
4	2	6				
5	8	3				
5	15	5				

(b) a et b étant deux réels strictement positifs, quelle relation semble lier les réels $\ln(a)$, $\ln(b)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$?

Activité de découverte de la fonction exp

Le but de cette activité est de découvrir les principales propriétés de la fonction exponentielle : exp en utilisant un tableur (ordinateur ou calculatrice)

Remarque 1 pour tout x réel $\exp(x) = e^x$, on utilisera indifféremment l'une ou l'autre notation.

Remarque 2 Sur la calculatrice il faut utiliser la fonction e^x grâce à la combinaison de touches 

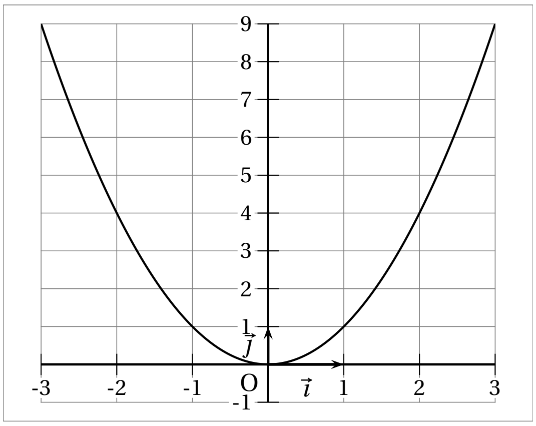
Avec le tableur il faut utiliser la fonction `EXP`

1. (a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

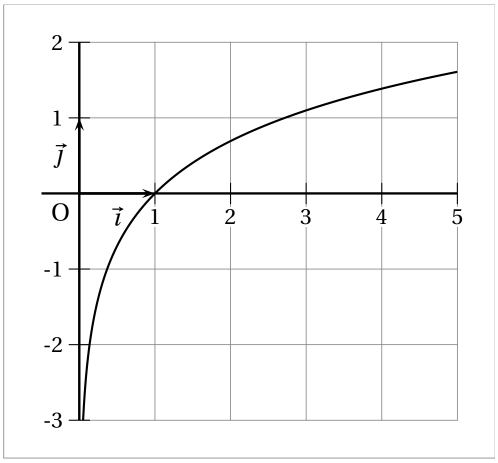
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	-15	-5	-2	-0,4	0	0,6	1	5	10
2	e^x									

2. (a) Tracer, l'aide sur votre calculatrice ou d'un logiciel (geogebra par exemple) la courbe représentative de la fonction exp.

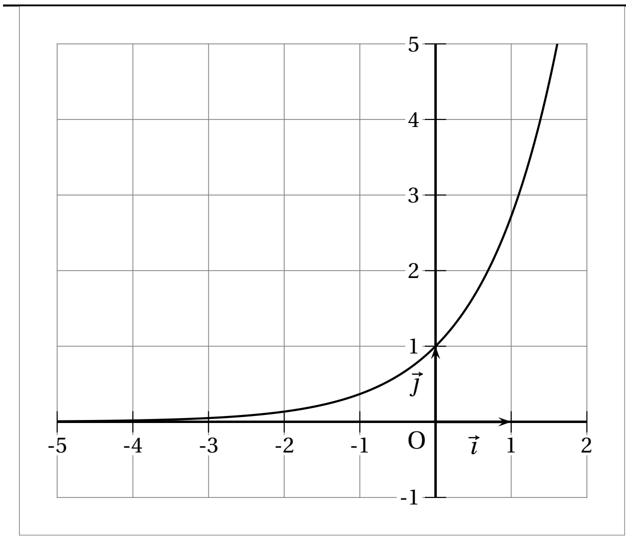
   (b) En déduire parmi les 4 représentations graphiques ci-dessous, celle de la courbe représentative de la fonction exponentielle



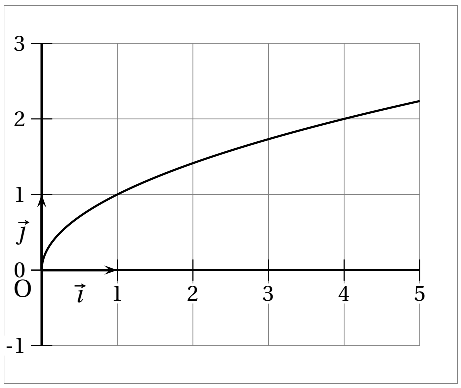
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

3. Déterminer le tableau de variation de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$

4. Déterminer le tableau de signe de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$

5. (a) compléter le tableau ci-dessous

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	$a+b$	$\exp(a)$	$\exp(b)$	$\exp(a+b)$	
2	0,5	0					
3	1	3					
4	2	4					
5	3	5					
5	5	8					

   (b) a et b étant deux réels strictement positifs, quelle relation semble lier les réels $\exp(a)$, $\exp(b)$ et $\exp(a+b)$?

6. Compléter le tableau suivant :

	A	B	C	D
1	a	-a	$\exp(a)$	$\exp(-a)$
2	0,2			
3	2			
4	10			
5	15			

7. Soit a un réel strictement positif, quelle relation semble lier $\exp(a)$ et $\exp(-a)$.

8. (a) compléter le tableau ci-dessous

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	$a-b$	$\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$	$\exp(a-b)$	
2	0,5	2				
3	-1	3				
4	4	2				
5	3	5				
5	8	5				

   (b) a et b étant deux réels strictement positifs, quelle relation semble lier les réels $\exp(a)$, $\exp(b)$ et $\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$?