Intégrale d'une fonction

I Définition

Définition 1 Intégrale d'une fonction

Soit f une fonction admettant, sur un intervalle I, F comme primitive.

Soit a et b deux réels quelconques de I.

On appelle **intégrale de a à b de f** le réel, $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$. On le note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

Ce réel est indépendant du choix de la primitive F de f.
a et b sont **les bornes de l'intégrale**.

Remarque

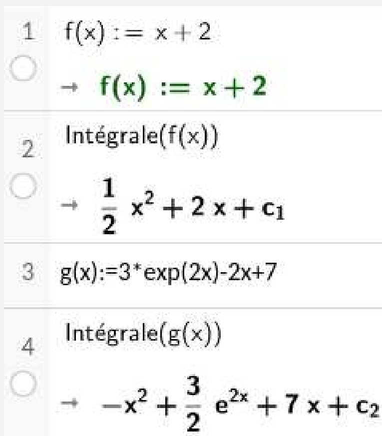
Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, x est « une variable muette », ce qui signifie que Le dx ou dt détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction : x, ou t.

Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3e^{2x}-2x+7$

1. Déterminer un primitive de f sur $\mathbb{R}$
2. Compléter les calculs suivants afin d'obtenir la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 3e^{2x}-2x+7dx$ puis une valeur approchée au centième.

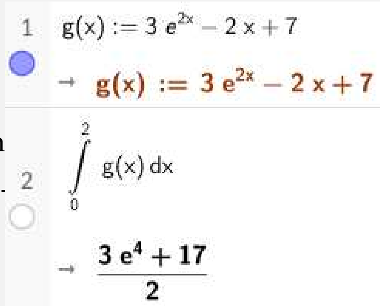
Rappel : détermination d'une primitive

On détermine une primitive à l'aide de la fonction `Intégrale` sa syntaxe est `Intégrale(fonction)` Si l'instruction est entrée dans la fenêtre algèbre, Géogébra ne calcule qu'une primitive en prenant comme constante 0



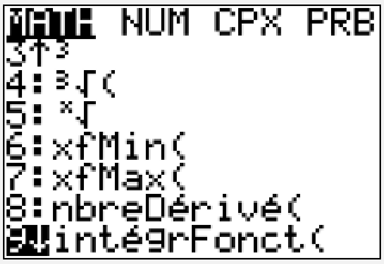
Calcul de la valeur d'une intégrale

On détermine la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide de la fonction `Intégrale` sa syntaxe est `int(fonction,variable,a,b)` ou plus simplement `int(fonction,a,b)`

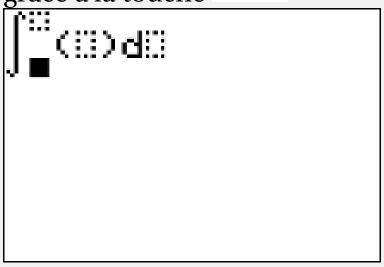


Calcul d'une intégrale nouvelle version

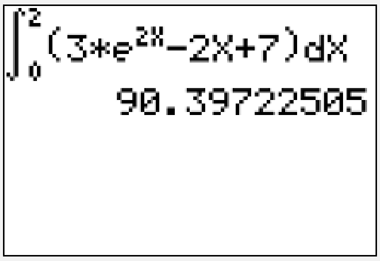
2nde math puis …



Il ne reste qu'à compléter en passant d'une case à l'autre grâce à la touche



On obtient une valeur approchée de l'intégrale

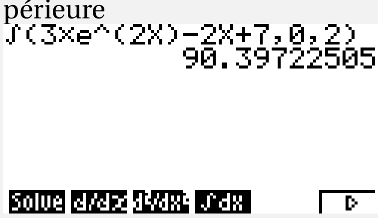


Calcul d'une intégrale, ancienne version

OPTN :CALC

$\int$dx

On complète entant la fonction, la borne inférieure, la borne supérieure



II Propriétés de l'intégrale

Propriété 1 Premières propriétés

a) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Démonstration : appliquer la définition

Théorème 1 Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ et α et β deux réels.

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 2 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$ et $\displaystyle\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x = 5$.

Calculer $\displaystyle\int_0^2 2f(x) - 3g(x)\mathrm{d}x$

Théorème 2 Relation de Chasles

Soient f une fonction dérivable sur l'intervalle I et soit a, b et c trois éléments de I.

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

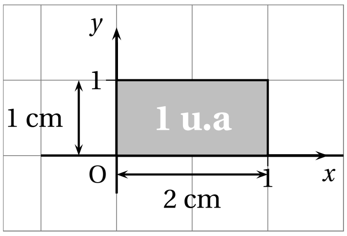
Théorème 3 Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ (donc $a \leq b$)

$$\text{Si pour tout } x \in [a\,;\,b],\ f(x) \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

III Interprétation graphique d'une intégrale, calcul d'aire

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1 Unité d'aire

Définition 2 Unitaire d'aire

L'unité d'aire est égale à l'aire d'un rectangle dont les cotés auraient pour dimension une unité sur chacun des axes du repère.

Pour notre exemple, l'unitaire d'aire est de ....

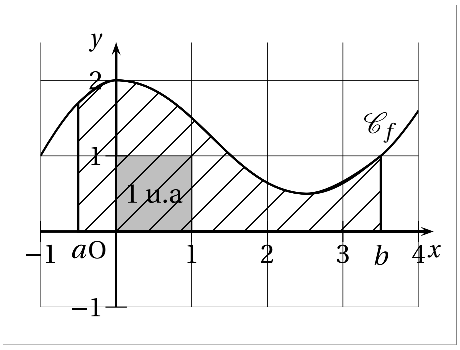
2 f est une fonction positive sur l'intervalle $[a; b]$

La courbe représentative de f sur l'intervalle $[a; b]$ est donc **au dessus** de l'axe des abscisses.

f est une fonction positive sur l'intervalle $[a; b]$

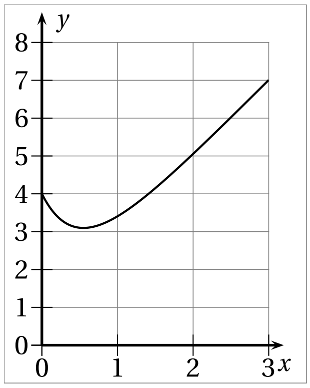
On note $\mathscr{A}$, l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de f, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{u.a}$$



Exemple 3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1 + 3e^{-2x}$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$d'unité graphique 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 sur l'axe des ordonnées. On admet que pour tout $x \in [0\,;\,3]$ $f(x) \geq 0$



On considère le domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, les deux axes et la droite d'équation $x = 3$.

1. Hachuré sur le graphique, le domaine $\mathscr{D}$
2. Estimer graphiquement l'aire de ce domaine.
3. Calculer l'aire en cm^2 de ce domaine. On en donnera la valeur exacte et une valeur approchée au mm^2.

En relisant le cours : déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

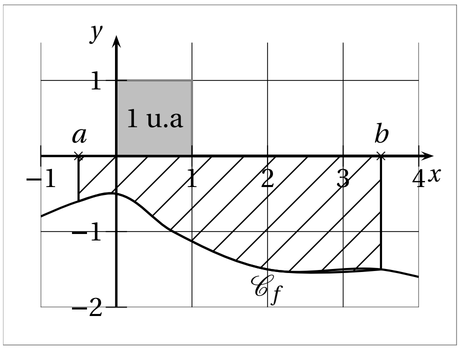
3 f est une fonction négative sur l'intervalle $[a;b]$

La courbe représentative de f sur l'intervalle $[a;b]$ est donc **en dessous** de l'axe des abscisses.

f est une fonction négative sur l'intervalle $[a;b]$

On note $\mathscr{A}$, l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de f, les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ et l'axe des abscisses.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathscr{A} \quad \text{u.a}$$



Exemple 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction h dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$(unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

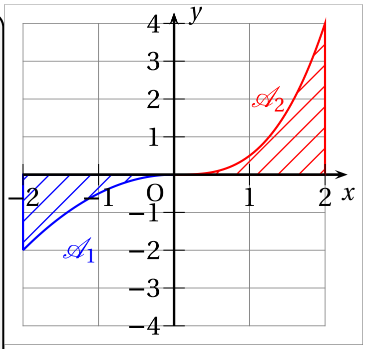
1. Déterminer le signe de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
2. Soit D le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$, et $x=3$
   (a) Démontrer que $\displaystyle\int_1^3 h(x)dx = -\ln(5)$
   (b) Calculer l'aire en cm^2 de ce domaine. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au mm^2.

4 f est une fonction changeant de signe sur l'intervalle $[a;b]$

f est une fonction changeant de signe sur l'intervalle $[a;b]$

On détermine les intervalles sur lesquels f est de signe constant.

- ➔ Calcul de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'aire de domaines.
  On utilise la relation de Chasles(Théorème II p.3) pour calculer l'intégrale sur chaque intervalle ou la fonction f est de signe constant.
- ➔ Calcul de l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses :
  L'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses est égale à la somme des aires sur les intervalles obtenus précédemment.



Ainsi pour notre exemple, si on note

- $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine délimité par la courbe, les axes du repère et la droite d'équation $x = -2$
- $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine délimité par la courbe, les axes du repère et la droite d'équation $x = 2$.

Alors

➔ $\int_{-2}^{2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-2}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{2} f(t)\mathrm{d}t = -\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$

➔ Soit $\mathscr{A}$, l'aire du domaine hachuré. $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

IV Calcul de l'aire d'un domaine compris entre deux courbes

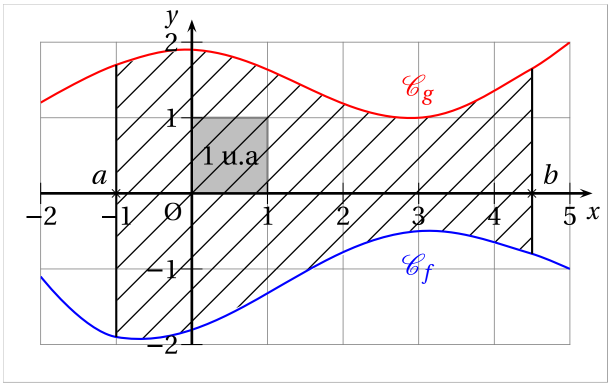
1 $f \leq g$ sur l'intervalle $[a;b]$

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Aire entre 2 courbes $f \leq g$

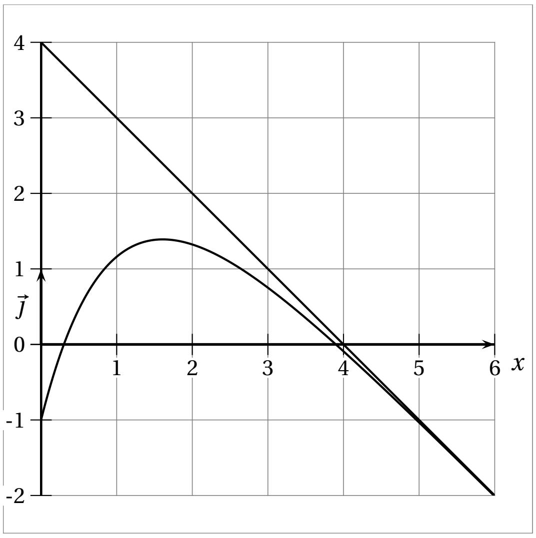
L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, et les courbes représentatives des deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[a;b]$ telles que pour tout x de $[a;b]$ $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$ est égale à :

$$\mathscr{A} = \int_a^b g(x) - f(x)\,dx.$$



Exemple 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x - 5e^{-x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$d'unité graphique 1 cm.

1. (a) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y = -x + 4$ est asymptote oblique
   (b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
2. Déterminer l'aire en cm^2 du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 5$. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au mm^2



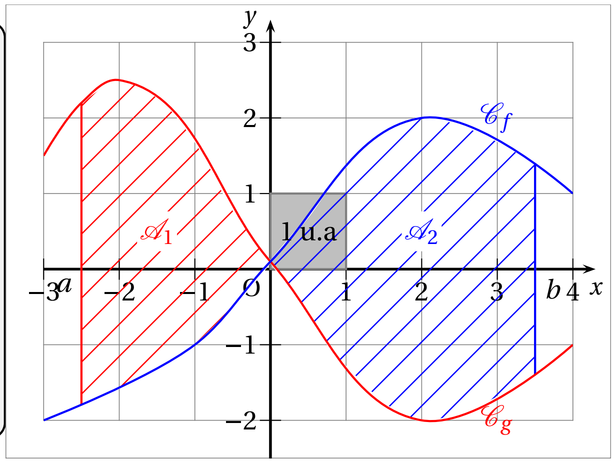
2 $g - f$ change de signe sur l'intervalle $[a; c]$

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$g - f$ change de signe sur l'intervalle $[a; c]$

- On détermine les points d'intersection des deux courbes
- On sépare le domaine en sous-domaines sur lesquels $g - f$ est de signe constant.

L'aire, exprimées en unités d'aire, du domaine délimités par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et les courbes représentatives des deux fonctions f et g est égale à la somme des aires des sous-domaines ainsi définis.



Pour notre exemple si on note $\mathscr{A}$ l'aire totale hachurée (en bleu ou en rouge on a : $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$

V La valeur moyenne

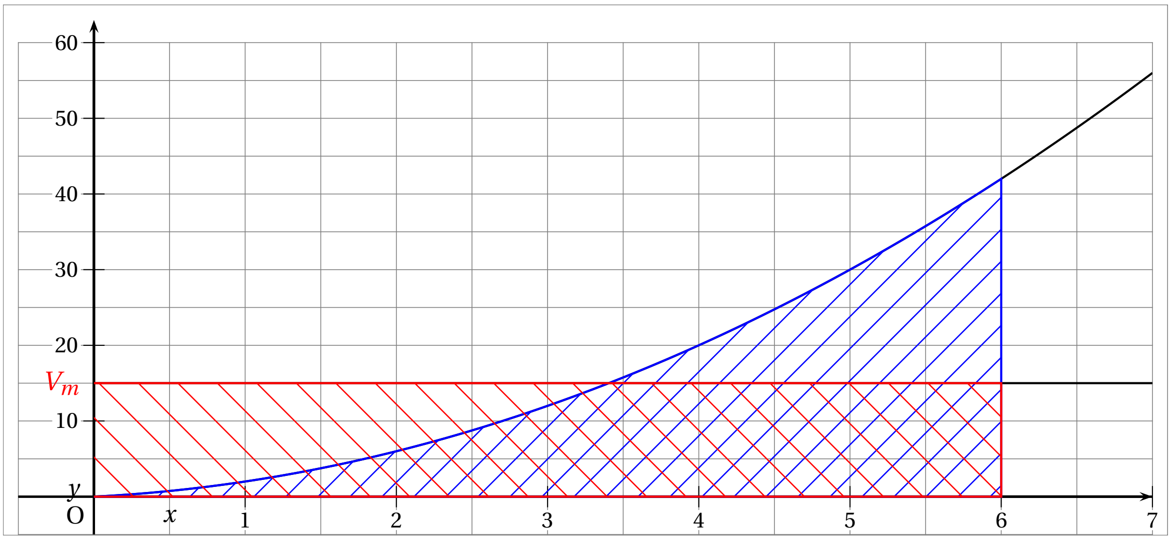
Définition 3 La valeur moyenne

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;\,b]$. On appelle **valeur moyenne de f entre a et b** le réel V_m défini par :

$$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque

Soit f est une fonction positive, soit V_m sa valeur moyenne sur l'intervalle $[a;b]$. Alors l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de hauteur V_m et de largeur $(b-a)$



Exemple 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$

Exercice 1 Centre étranger juin 2003 Comptabilité et Gestion, Informatique de gestion 4 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,9]$ par : $f(x) = \dfrac{-x^2 + 10x - 9}{x}$.

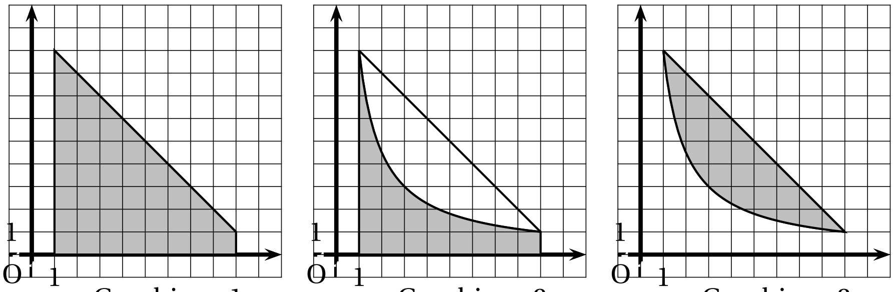
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2 + 10x - 9 = 0$.
2. (a) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,9]$, on a : $f(x) = 10 - x - \dfrac{9}{x}$.

   (b) Calculer alors l'intégrale $\text{I} = \displaystyle\int_1^9 f(x)\,\text{d}x$ (donner la valeur exacte).

   (c) Montrer que I peut s'écrire sous la forme $a + b\ln 3$ où a et b sont deux nombres réels qu'il faut déterminer.
3. On a représenté sur chacun des graphiques ci-dessous les fonctions g et h définies sur l'intervalle $[1\,;\,9]$ par :

$$g(x) = 10 - x \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{9}{x}.$$

On a aussi grisé sur chacun des graphiques une partie du plan.



Graphique 1 Graphique 2 Graphique 3

On pose : $\text{I} = \displaystyle\int_1^9 \left(10 - x - \frac{9}{x}\right)\text{d}x$, $\text{J} = \displaystyle\int_1^9 (10 - x)\,\text{d}x$ et $\text{K} = \displaystyle\int_1^9 \frac{9}{x}\,\text{d}x$.

Pour chacune des trois questions, reporter sur la copie la réponse exacte (il y a une seule bonne réponse par ligne).

Q1	Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 1 ?	I	J	K
Q2	Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 2 ?	I	J	K
Q3	Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 3 ?	I	J	K