Primitives d'une fonction

I Définition et propriétés

Définition 1 Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
La fonction F est **une primitive de** f **sur** I si F est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$ ....

Théorème 1

Toute fonction f dérivable sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I

Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$

1. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$
2. Vérifier que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^3 + 5$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Théorème 2 Les primitives de f sur I

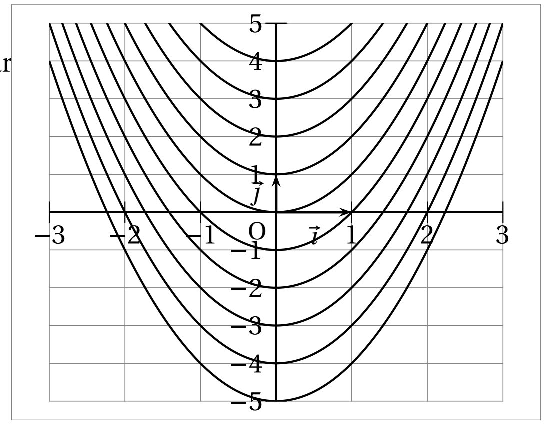
Soit F une primitive de f sur un intervalle I

Les primitives de f sur l'intervalle I sont les fonctions de la forme .... ou C est une constante réelle

Théorème 3 unicité de la primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant une primitive sur I.
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$
Il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$

Exemple 2 Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ vérifiant $F(1) = 3$



Pour revoir la notion de primitive :

II Primitives usuelles

1 primitives usuelles

Fonction	Une primitive	conditions
0		$I=\mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}$		$I=\mathbb{R}$
x		$I=\mathbb{R}$
x^2		$I=\mathbb{R}$
x^n $(n \neq -1)$		n entier, $n \geq 0$ $I=\mathbb{R}$
		n entier $n<-1$, $I=\mathbb{R}^*$
		n non entier, $I=]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x^2}$		$I=\mathbb{R}^*$
$\cos(x)$		$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$		$\mathbb{R}$
$\sin(x)$		$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$		
e^x		$\mathbb{R}$
e^{ax} $(a \neq 0)$		$\mathbb{R}$

Exemple 3 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I

1. $f(x)=2x^3-9x^2+x+1$, $I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=\cos(2x)$, $I=\mathbb{R}$
3. $f(x)=6e^{-3x}$, $I=\mathbb{R}$

Polynôme $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x^2}$ et $\exp(x)$ Calculs simples de primitives

2 Utilisation d'un logiciel de calcul formel

Avec la fenêtre calcul formel de Géogébra et la fonction **Intégrale(<fonction>)**

1 $\int x^2 \, dx$

$\rightarrow \frac{1}{3} x^3 + c_1$

2 $\int x^n \, dn$

$\rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + c_2$

3 $\int e^{ax} \, dx$

$\rightarrow \frac{e^{ax}}{a} + c_3$

4 $\int \frac{1}{x^n} \, dx$

$\rightarrow$?

III Primitives des fonctions de la forme $u'u^n$

1 cas 1 : $n \neq -1$

Théorème 4 $f(x) = u'(x)u^n(x)$, $n \neq -1$

Soit n un entier relatif, $n \neq -1$
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, ne s'annulant pas sur I si $n < 0$

Alors les primitives de la fonction f définie sur I par $f(x) = u'(x)u^n(x)$ sont les fonctions de la forme ....

où C est une constante réelle.

Propriété 1 $(ax+b)^n$, $n \neq -1$

Soit a et b deux réels $a \neq 0$. soit I un intervalle tel que si $n < 0$ alors pour tout $x \in I$, $ax+b \neq 0$

Alors une primitive de $(ax+b)^n$ est ....

Exemple 4 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I

1. $f(x) = (2x-1)^3$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{2}{(1+2x)^2}$, $I = \mathbb{R}_+^*$
3. $f(x) = \dfrac{7}{(3x-5)^3}$, $I = \mathbb{R}_+^*$

2 cas 2 : $n = -1$

Théorème 5 Primitive de $\dfrac{u'}{u}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$.
Les primitives de la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions de la forme .... ou C est une constante réelle

Propriété 2 Primitive de $\dfrac{1}{ax+b}$

Soit a et b deux réels $a \neq 0$. soit I un intervalle tel que pour tout $x \in I$, $ax+b \neq 0$

Alors une primitive de $\dfrac{1}{ax+b}$ est ....

Exemple 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Exemple 6 Soit g la fonction définie sur $]-0,5\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 3x+1+\dfrac{1}{2x+1}$.
Déterminer G une primitive de g sur I

Exemple 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{6x+4}{(2x+3)^2}$. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$, on pourra déterminer deux réels, a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{2x+3} + \dfrac{b}{(2x+3)^2}$

IV Primitives des fonction de la forme $u'e^u$

Théorème 6 Primitives des fonction de la forme $u'e^u$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I
Les primitives de la fonction f définie sur I par $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions de la forme .... ou C est une constante réelle

Exemple 8 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I

1. $f(x) = 2x + 1 - 5e^{5x}$
2. $f(x) = 3e^{2x}$

V Exercice

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (13-6x)e^{-2x}$,Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (3x-5)e^{-2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Revoir le cours