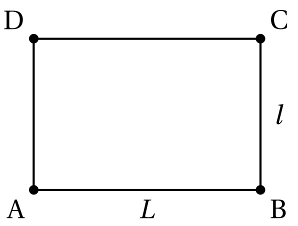
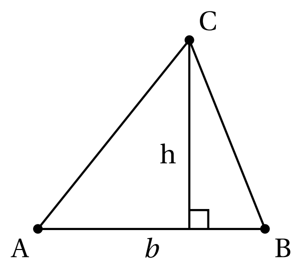
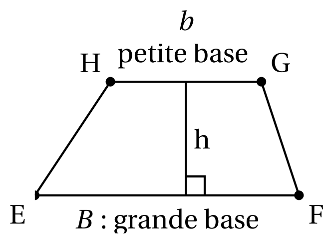
Calcul d'intégrale, calcul d'aire

I Rappel

Aire d'un rectangle	Aire d'un triangle	Aire d'un trapèze
		
$\mathscr{A}$ =	$\mathscr{A}$ =	$\mathscr{A}$ =

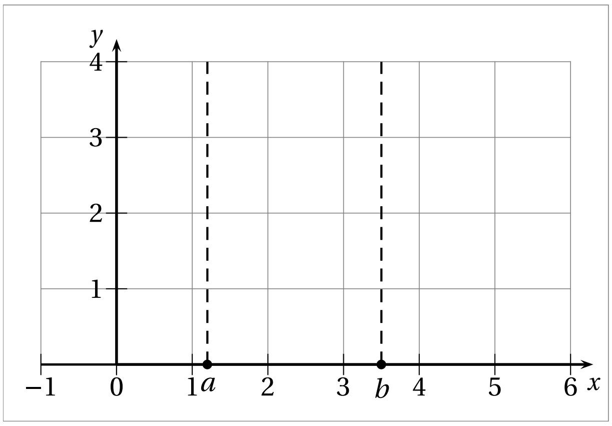
Définition 1 Intégrale

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$

Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$ On appelle intégrale de f de a à b, le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ défini par $F(b)-F(a)$

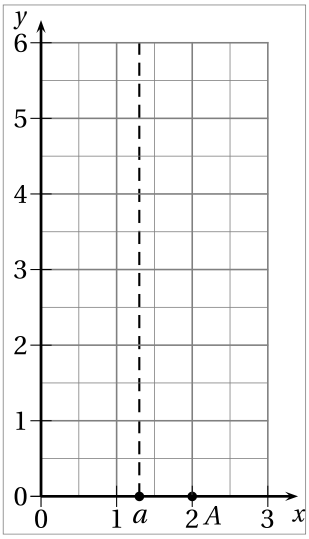
II Cas ou f est une fonction positive

1 On considère la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3$.



1. Déterminer F_1 une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la valeur de $I_1=\displaystyle\int_1^5 f_1(x)\mathrm{d}x=F_1(5)-F_1(1)$
3. Déterminer la valeur de $I_2=\displaystyle\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x=F_1(b)-F_1(a)$
4. Dans le repère ci-contre tracer la courbe représentative de la fonction f_1.
5. Comment peut-on interpréter graphiquement la valeur trouvée en I_2 ?
6. Comment interprétez-vous graphiquement la valeur trouvée en I_1 ?

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = 2x$.



1. Déterminer F_2 une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la valeur de $I_3 = \displaystyle\int_0^2 f_2(x)\mathrm{d}x = F_2(2) - F_2(0)$
3. Déterminer la valeur de $I_4 = \displaystyle\int_0^a f_2(x)\mathrm{d}x = F_2(a) - F_2(0)$
4. Dans le repère ci-contre tracer la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction f_2.
5. (a) Soit A le point de coordonnées (2,0) et soit B la point de coordonnées (2,4). Déterminer l'aire du triangle OAB,

   (b) A quel calcul effectué précédemment, l'aire du triangle correspond-t-il ?
6. (a) Comment peut-on interpréter graphiquement la valeur trouvée en I_4 ?

   (b) Vérifier votre affirmation précédente en calculant l'aire d'un domaine du domaine du plan à définir.

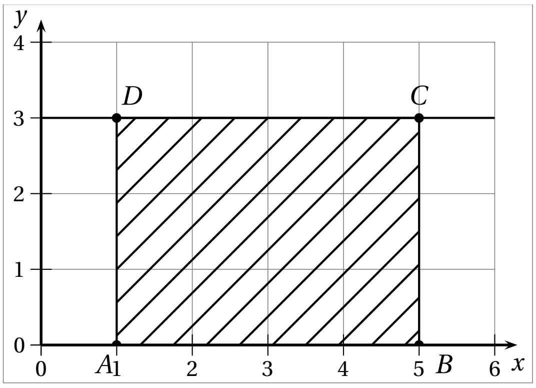
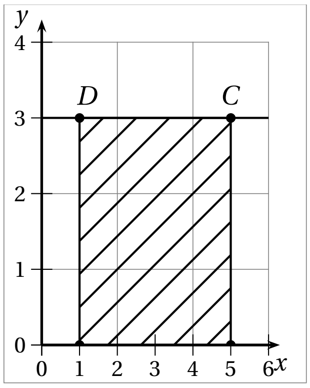
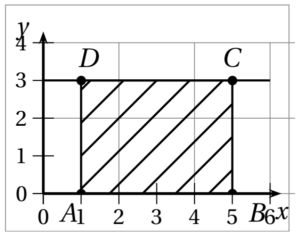
3 Première conclusion

D'après ce que nous venons d'observer on peut conjecturer que :

Si f est une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a, b]$ alors $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'........... du domaine du plan délimité par ....

4 Un problème d'échelle

1. Calculer l'aire, noté $\mathscr{A}_D$, en cm^2 des domaines hachurés sur les figures ci-dessous :

 $\mathscr{A}_D =$	 $\mathscr{A}_D =$	 $\mathscr{A}_D =$
$\mathscr{A}_u =$	$\mathscr{A}_u =$	$\mathscr{A}_u =$
$\mathscr{A}_r =$	$\mathscr{A}_r =$	$\mathscr{A}_r =$

2. A quoi correspond sur chaque graphique 1cm^2 ?

3. Commet peut-on déterminer « simplement » l'aire des domaines hachurés et vérifier votre résultat
4. La conclusion établie au 3 est-elle correcte ?
5. Pour chaque graphique déterminer l'aire, notée $\mathscr{A}_u$ en unité d'aire des domaines hachurés. Qu'observez vous ?
6. Pour chaque graphique, calculer l'aire, notée $\mathscr{A}_r$ en cm^2 d'un rectangle unité (rectangle d'une unité sur une unité) que vous aurez grisé.
7. Compléter la formule suivante : $\mathscr{A}_{...} = \mathscr{A}_{...} \times \mathscr{A}_{...}$
8. Comment modifier la conclusion établie au 3 pour que la propriété devienne correcte

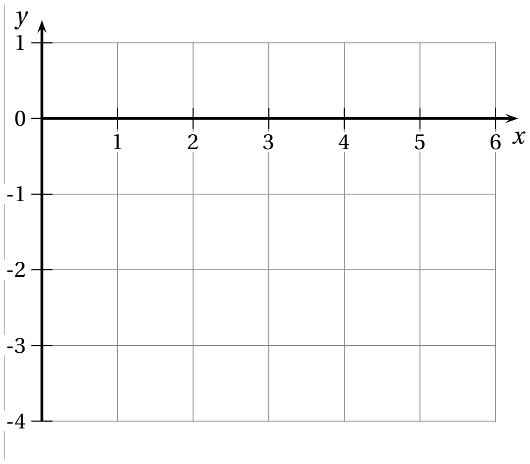
5 Application

On considère la fonction f, définie sur $[0,5]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

1. Donner l'expression de f sur l'intervalle $[0,1]$
2. Donner l'expression de f sur l'intervalle $[1,3]$
3. Donner l'expression de f sur l'intervalle $[3,6]$
4. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x$

III Cas 2 : f est une fonction négative

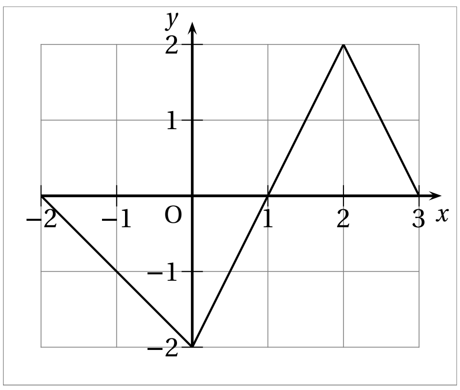
1 Introduction



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3$

1. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer la valeur de $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$
3. Calculer, en unité d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$
4. En déduire une relation entre $\mathscr{A}$ et I lorsque f est négative.

2 Exemple



On considère la fonction f définie sur $[-2, ,3]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous

1. A première vue, la valeur de $I = \displaystyle\int_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x$ est positive ou négative ?
2. Déterminer graphiquement une valeur approchée de I
3. Vérifier votre réponse en calculer la valeur de I

3 Cas particulier

On considère une fonction sf définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\,3]$

1. Déterminer l'expression de f sur les intervalles $[0\,;\,1]$; $[1\,;\,2]$ et $[2\,;\,3]$.
2. Déterminer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et telle que pour tout $x \in [0\,;\,3]$, $g(x) = f(x)$
   (a) Compléter en .... (couleur à préciser) le graphique, afin d'obtenir la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-3}^{3} g(x)\mathrm{d}x$
   (c) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x$
4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, impaire et telle que pour tout $x \in [0\,;\,3]$, $h(x) = f(x)$
   (a) Compléter en .... (couleur à préciser) le graphique, afin d'obtenir la courbe représentative de la fonction h sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-3}^{3} h(x)\mathrm{d}x$
   (c) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-2}^{2} h(x)\mathrm{d}x$