Rappel sur les fonctions

I Définition d'une fonction

Définition 1 Une fonction

Soit I un intervalle ou une union d'intervalle de $\mathbb{R}$
Lorsqu'à chaque nombre réel x appartenant à I on associe un **unique** réel y, on définit une fonction f sur I

La fonction f est noté $f : x \mapsto y$ on lit « la fonction f qui a x associe y » et donc $y = f(x)$

- ➔ I est l'ensemble de définition de la fonction f.
- ➔ y est l'**image** de x par f (l'image est unique)
- ➔ x est un **antécédent** de y par f.

Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ ce qui peut se noter $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$

déterminer $f(1)$

$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$

Donc 3 est **l'image de** 1 par f

1 est **l'antécédent** de 3 par f

$f : 1 \longmapsto 3$

Antécédent de 3

Image de 1

Remarque

Si x est un nombre réel appartenant à I, alors $f(x)$ est un nombre réel?
Ne pas confondre la fonction f avec le nombre $f(x)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- ➔ Un nombre $x \in I$ possède une **unique** image par f
- ➔ Un nombre peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédent par f sur I.

Exemple 2 L'Organisation mondiale de la santé (OMS) a défini en 1997 l'indice de masse corporelle par la formule suivante : $\text{IMC} = \dfrac{\text{Poids en kg}}{\text{Taille en mètre}^2}$
On considère une personne dont l'IMC est de 22 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$.

1. déterminer l'expression de p, le poids en kg, de cette personne en fonction de x, sa taille en mètre.
2. Quelle est la poids de cette personne si elle mesure 1,75 m?
3. Peut-on déterminer la taille d'une personne ayant un poids de 60 kg? Si oui en donner une valeur approchée au centimètre près.

II Mode de représentation d'une fonction

Propriété 1 Mode de représentation d'une fonction

Une fonction peut-être définie à l'aide d'une expression algébrique, d'une représentation graphique, d'un tableau de valeurs, d'un algorithme.

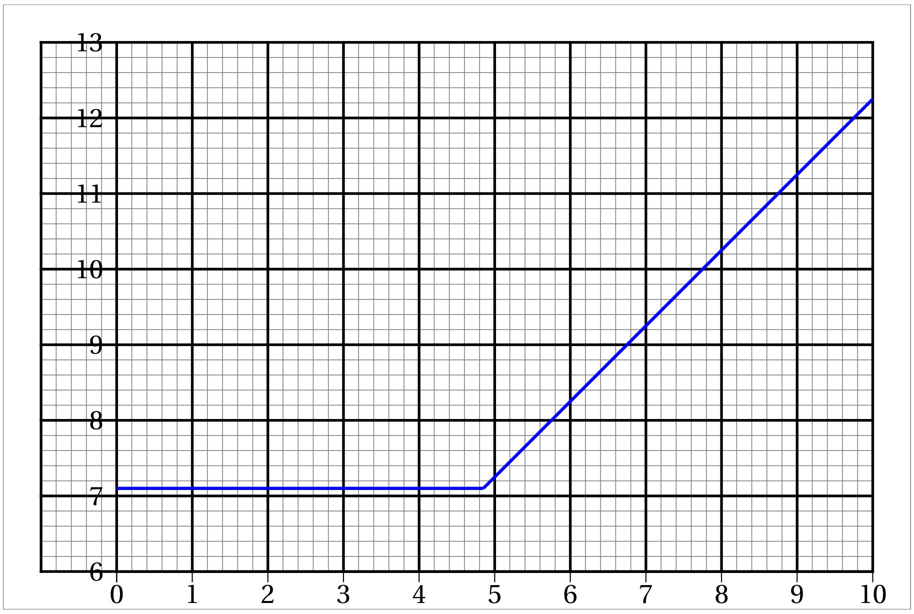
Exemple 3 Modéliser une situation à l'aide d'une fonction
Dans le Pas-de-Calais, lorsqu'on souhaite prendre un taxi, le coût de la prise en charge est de 2,25 €, et le tarif pour un kilomètre, applicable pour une course aller et retour de nuit du lundi au samedi inclus ou de jour et de nuit les dimanches et jours fériés est de 1,27 €.
On note x le nombre de kilomètres parcouru lors d'un trajet un dimanche.

1. Déterminer l'expression du prix p en euros, en fonction du nombre de kilomètres parcourus.
2. Déterminer le coût d'une course en taxi pour un parcourt de 12 km.
3. En fait quel que soit le montant affiché au compteur la somme à payer ne peut être inférieure à 7,10 €. Déterminer le nombre kilomètres à parcourir pour que le montant de la course en taxi soit supérieure à 7,10 €.

Définition 2 Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit f une fonction définie sur un ensemble I.
On appelle courbe représentative de la fonction f, notée $\mathscr{C}_f$, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ où $x \in I$ et $y = f(x)$

Exemple 4 Représentation graphique
La courbe représentative ci-dessous est le représente le tarif, en euros d'un trajet en taxi dans le Pas-de-Calais pour un aller et retour en journée du lundi au samedi inclus exprimé en kilomètres.



1. Quel est le tarif minimal d'une course en taxi ?
2. Combien faut il parcourir de kilomètres au minimum pour payer plus que le tarif minimal de la course déterminé à la question précédente ?

III Lecture graphique

1 Résoudre l'équation $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

Définition 3 Résoudre l'équation $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

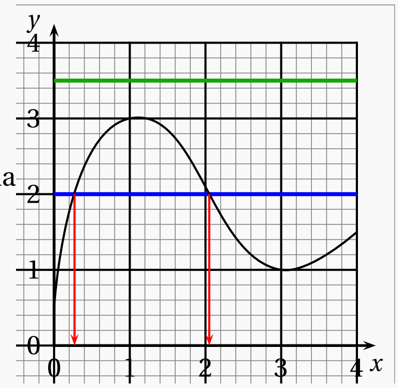
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur I
Soit $k \in \mathbb{R}$, **résoudre graphiquement l'équation** $f(x) = k$ **sur un intervalle** I signifie déterminer toutes les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite d'équation $y = k$.

On détermine tous **les antécédents** de k par la fonction f sur l'intervalle I

Soit k un réel, le nombre k n'a pas forcement un seul antécédent par f

Méthode 1 Résolution de l'équation $f(x) = k$

1. On trace la droite d'équation $y = k$
2. On repère les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de la droite tracée
3. On déterminer les abscisses des points précédents.



Exemple 5 Soit f une fonction définie sur $[0\,;4]$, dont la représentation graphique est donnée dans la méthode 1

1. Déterminer les éventuels antécédents de 2
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3,5$

2 Résoudre l'inéquation $f(x) \geq k$ ou $f(x) > k$ ou $f(x) \leq k$ ou $f(x) < k$, $k \in \mathbb{R}$

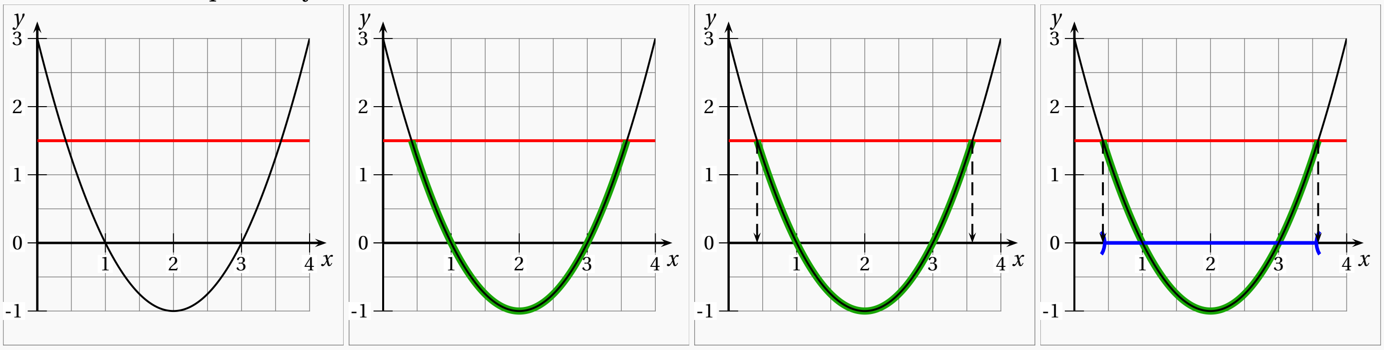
Définition 4 Résoudre l'inéquation $f(x) < k$

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < k$ sur l'intervalle I, signifie déterminer l'abscisse des points de la courbe représentative de f situés en-dessous de la droite d'équation $y = k$

Méthode 2 Résolution de l'équation $f(x) < k$

1. On trace la droite d'équation $y = k$
2. On repère les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés en-dessous de la droite tracée
3. On déterminer les abscisses des points précédents.

➡ Résoudre l'inéquation $f(x) < 1,5$



$S =$..........................

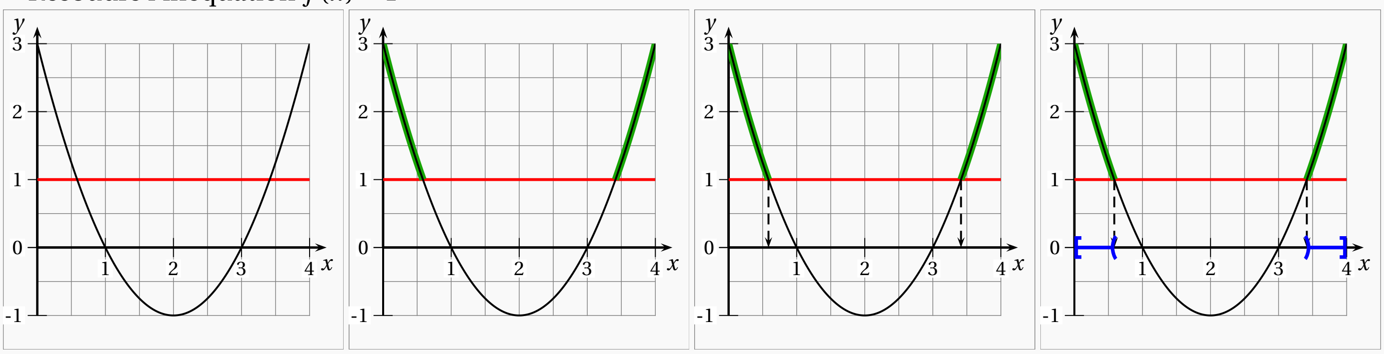
Définition 5 Résoudre l'inéquation $f(x) > k$

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > k$ sur l'intervalle I, signifie déterminer l'abscisse des points de la courbe représentative de f situés au-dessus de la droite d'équation $y = k$

Méthode 3 Résolution de l'équation $f(x) > k$

1. On trace la droite d'équation $y = k$
2. On repère les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de la droite tracée
3. On détermine les abscisses des points précédents.

➡ Résoudre l'inéquation $f(x) > 1$



$S =$..........................

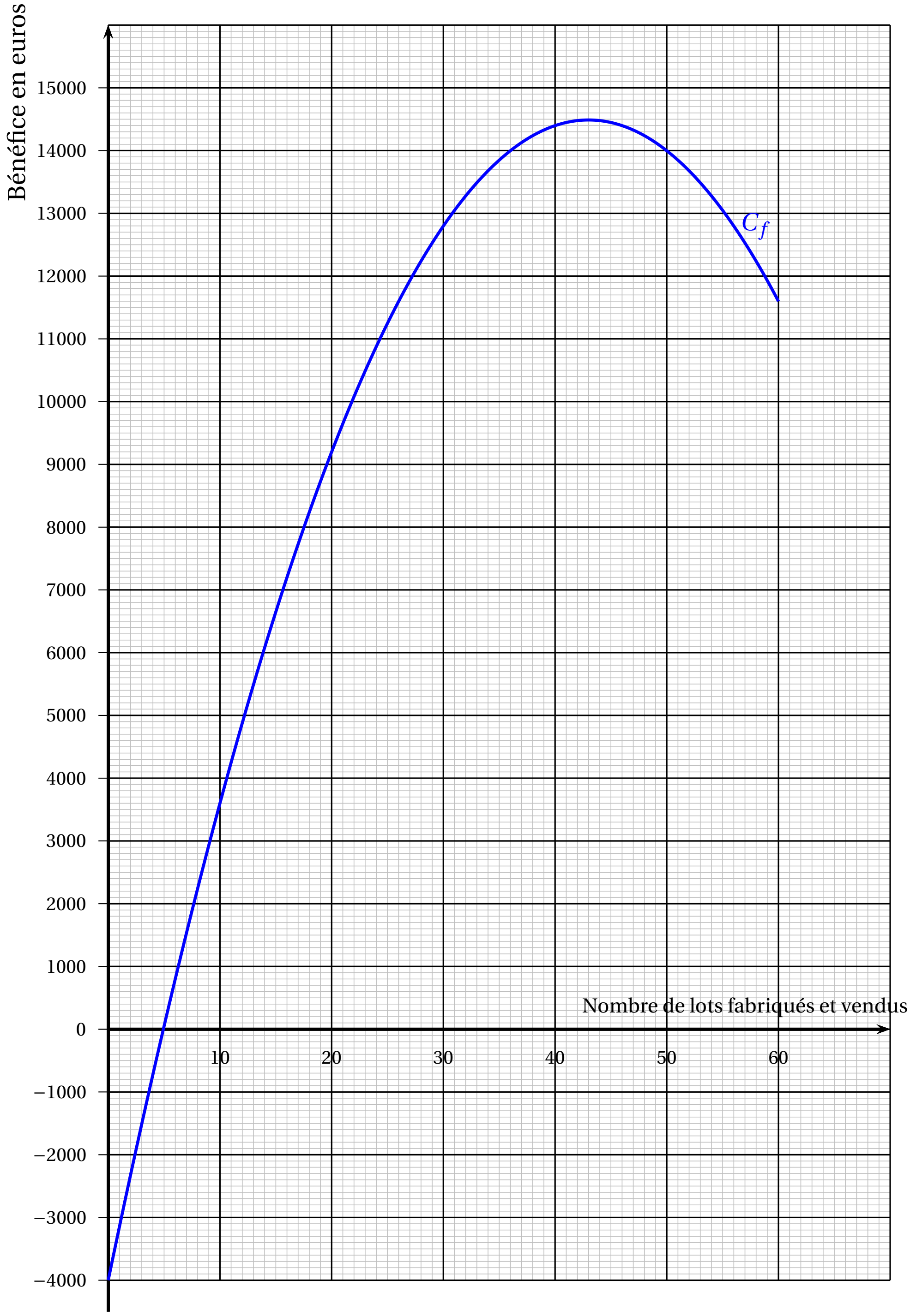
Remarque :

➔ Résoudre l'inéquation $f(x) \leq k$
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq k$ sur l'intervalle I, signifie déterminer l'abscisse des points de la courbe représentative de f situés **sur** ou en-dessous de la droite d'équation $y = k$

➔ Résoudre l'inéquation $f(x) \geq k$
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq k$ sur l'intervalle I, signifie déterminer l'abscisse des points de la courbe représentative de f situés **sur** ou au-dessus de la droite d'équation $y = k$

Exercice 1 Dans une usine pharmaceutique, une unité de production fabrique un médicament qu'elle vend par lots. Sa capacité de production est limitée à 60 lots par mois. Sur le graphique ci-dessous est représenté le bénéfice, en euros, en fonction du nombre de lots fabriqués et vendus en un mois.

1. Avec la précision permise par le graphiqueet en faisant apparaître les traits utiles à la lecture :
   (a) i. Déterminer le bénéfice, en euros, correspondant à la fabrication et à la vente en un mois de 10 lots de ce médicament.
       ii. Déterminer $f(30)$
   (b) i. Déterminer le nombre de lots que l'usine pharmaceutique doit fabriquer et vendre en un mois pour obtenir un bénéfice de 6 000 euros.
       ii. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 9\,000$
   (c) i. Pour quels nombres de lots fabriqués et vendus en un mois, l'usine pharmaceutique réalise-t-elle un bénéfice supérieur ou égal à 14 000 euros ?
       ii. Résoudre l'inéquation $f(x) < 1\,200$
2. (a) Pour quels nombres de lots fabriqués et vendus en un mois, la production est-elle rentable ?
   (b) Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $[0\,;\,60]$
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,60]$


Bénéfice en euros
15000
14000
13000
12000
11000
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
−1000
−2000
−3000
−4000
C_f
Nombre de lots fabriqués et vendus
10
20
30
40
50
60

IV Algorithme

Définition 6

En informatique, une fonction peut être considérée comme un sous programme, utilisé pour définir un code réutilisable, organiser ou simplifier les programmes. Ceci peut être bien utile pour éviter de nombreux copier.

Avec python

Pour créer une fonction, on utiliser le mot clé `def` suivi d'un nom puis de parenthèses, qui peuvent contenir des paramètres et, ensuite d'un double point.
Les instructions contenus dans la fonctions doivent être indenté.
Dès qu'une ligne n'est plus indenté, la fonction se termine.

def nom_de_la_fonction(paramètres) :
Instructions ...

Exemple 6

```python
def f(x):
    return x**2+3*x+1
```

CoursAlgo1.py

```
>>> %Run CoursAlgo1.py
>>> f(0)
1

>>> f(2)
11
```

Exercice 2 On considère l'algorithme suivant :

```python
def IMC(poids, taille=1.70):
    return poids/taille**2
```

CoursAlgo2.py

1. Quelle est la valeur renvoyée par l'algorithme si l'utilisateur deman IMC(62,1.75) ?
2. Quelle est la valeur renvoyée par l'algorithme si l'utilisateur deman IMC(68) ?

Exemple 7

```python
def IMC(poids, taille):
    return poids/taille**2


def corpulence(poids, taille=1.70):
    if IMC(poids, taille)<18.5:
        print("Insuffisance pondérale")
    elif IMC(poids, taille)>25:
        print("Obesité")
    else :
        print("Corpulence normale")
```

CoursAlgo3.py

1. Quelle est la valeur renvoyée par l'algorithme si l'utilisateur demande corpulence(62,1.75) ?
2. Quelle est la valeur renvoyée par l'algorithme si l'utilisateur demande corpulence(68) ?