Propriétés de l'espérance et de la variance

Theorem

Paramètres de la variable aléatoire $aX + b$, a et b réels Soit X une variable aléatoire et soit a et b deux réels, alors

$$E(aX + b) = \ldots\ldots\ldots\ldots aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = \ldots\ldots\ldots\ldots a^2V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = \ldots\ldots\ldots\ldots |a|\sigma(X)$$

On rappelle que $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

par exemple :

$|4| = 4$

$|-5| = 5$

Exemple

Un grossiste vend des produits frais à des commerçants. On note X la variable aléatoire qui à chaque journée associe le montant d'achat d'un commerçant. On admet que $E(X) = 400$ euros et $\sigma(X) = 80$ euros.
30 commerçants achètent chaque jours leurs marchandises. De plus chaque jour, ce grossiste a 200 euros de charges fixes.
On note Y la variable aléatoire qui à chaque jour associe le bénéfice du jour.

1. Justifier que $Y = 30 \times X - 200$
2. Déterminer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$

Propriétés de l'espérance et de la variance

Exemple

Un grossiste vend des produits frais à des commerçants. On note X la variable aléatoire qui à chaque journée associe le montant d'achat d'un commerçant. On admet que $E(X) = 400$ euros et $\sigma(X) = 80$ euros.
30 commerçants achètent chaque jours leurs marchandises. De plus chaque jour, ce grossiste a 200 euros de charges fixes.
On note Y la variable aléatoire qui à chaque jour associe le bénéfice du jour.

1. Le grossiste vend pour X euros de marchandises à 30 personnes il gagne donc 30 X euros.
   Il a des charges de 200 euros que l'on doit déduire de sa recette
   Donc le bénéfice est $Y = 30X - 200$

Propriétés de l'espérance et de la variance

Exemple

On admet que $E(X) = 400$ euros et $\sigma(X) = 80$ euros.

1. Justifier que $Y = 30 \times X - 200$
2. Déterminer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$

$E(Y) = E(30X - 200) = 30E(X) - 200 = 30 \times 400 - 200$
Donc E(X)=1000 euros
$V(Y) = V(30X - 200) = 30^2 V(X) = 30^2 \times 80^2$
$V(Y) = 5\ 760\ 000$ $\sigma(Y) = \sigma(30X - 200) = 30\sigma(X) = 30 \times 80$
donc $\sigma(X) = 2\ 400$ $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{5\ 760\ 000} = 2\ 400$

Définition : Variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires
Les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si pour tout réels x et y on a :

$$p\left((X \leq x) \ \textbf{et} \ (Y \leq y)\right) = p(X \leq x) \times p(Y \leq y)$$

théorème Espérance et variance de $X + Y$

Soient X et Y deux variables aléatoires alors

$$E(X+Y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots E(X) + E(Y)$$

$$E(X-Y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots E(X) - E(Y)$$

Propriétés de l'espérance et de la variance

théorème Espérance et variance de $X + Y$

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendante** alors

$$V(X+Y) = \dots\dots\dots V(X) + V(Y)$$

$$V(X-Y) = \dots\dots\dots V(X) + V(Y)$$

Exemple

Un boulanger possède, dans une même ville, deux magasins.
On note X, le bénéfice journalier de sa boulangerie en centre ville et on note Y le bénéfice journalier de sa boulangerie en bord de plage.
La variable aléatoire X a pour espérance 1 300 euros et pour écart-type 200 euros.
La variable aléatoire Y a pour espérance 1 700 euros et pour écart-type 350 euros.
On admet que les bénéfices des deux magasins sont indépendants.
Déterminer le bénéfice moyen réalisé par cet artisan dans ses deux magasins ainsi que l'écart-type associé au bénéfice de ces deux magasins

Exemple

La variable aléatoire X a pour espérance 1 300 euros et pour écart-type 200 euros.
La variable aléatoire Y a pour espérance 1 700 euros et pour écart-type 350 euros.

On note Z le bénéfice journalier total réalisé par ce boulanger.
Clairement $Z = X + Y$ donc le bénéfice moyen est
$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 1\ 300 + 1\ 700$ donc
$E(Z) = 3\ 000$ euros

Exemple

La variable aléatoire X a pour espérance 1 300 euros et pour écart-type 200 euros.
La variable aléatoire Y a pour espérance 1 700 euros et pour écart-type 350 euros.
On admet que les bénéfices des deux magasins sont indépendants.

On note Z le bénéfice journalier total réalisé par ce boulanger.
Les variables étant supposées indépendantes on a :
$V(Z) = V(X+Y) = V(Y) + V(Y) = 200^2 + 350^2$ donc
$V(X+Y) = 162\ 500$ et donc $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{162\ 500}$ donc
$\sigma(Z) \simeq 403,11$ euros

$V(Z) = V(X+Y) = V(Y) + V(Y) = 200^2 + 350^2$ donc
$V(X+Y) = 162\ 500$
et donc $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{162\ 500}$ donc $\sigma(Z) \simeq 403,11$ euros
Si on regarde plus attentivement le résultat on a :
$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{200^2 + 350^2}$
soit $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$

Proposition

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois normales respectives $N(\mu_1, \sigma_1)$ et $N(\mu_2, \sigma_2)$.
Alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi normale d'espérance $\mu_1 + \mu_2$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$
Alors la variable aléatoire $X_1 - X_2$ suit la loi normale d'espérance $\mu_1 - \mu_2$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

Propriétés de l'espérance et de la variance

Théorème : Théorème de la limite centrée

Soit X_1, X_2, …, X_n n variable aléatoire indépendantes, suivant toutes la même loi d'espérance μ et d'écart-type σ.
Pour n suffisamment grand, la variable aléatoire $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ suit approximativement la loi normale $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Démonstration : $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$

Donc

$$\begin{aligned}
E(\overline{X}) &= E(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}) \\
&= \frac{1}{n} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\
&= \frac{1}{n} \left(E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\mu + \mu + \ldots + \mu \right) \\
&= \frac{1}{n} \times n \times \mu \\
&= \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n} \times \mu \\
&= \mu
\end{aligned}$$

Démonstration : $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$

Donc

$$\begin{aligned} V(\overline{X}) &= V(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}) \\ &= \frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \times n \times \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Donc $\sigma(\overline{X}) = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}} = \dfrac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

cas particulier

Si les variables aléatoires X_i suivent toutes la même loi normale $N(\mu, \sigma)$ alors alors variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Exemple

Durant 16 jours, le boulanger examine ses ventes dans son magasin de centre ville. On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque série de 16 jours associe le bénéfice moyen obtenu.
Rappel : La variable aléatoire X a pour espérance 1 300 euros et pour écart-type 200 euros

1. Déterminer les paramètres de la variable aléatoire $\overline{X}$
2. Déterminer la probabilité que le bénéfice moyen sur 16 jours soit compris entre 1 225 et 1 375 euros

Exemple

Durant 16 jours, le boulanger examine ses ventes dans son magasin de centre ville. On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque série de 16 jours associe le bénéfice moyen obtenu.
Rappel : La variable aléatoire X a pour espérance 1 300 euros et pour écart-type 200 euros

1. Déterminer les paramètres de la variable aléatoire $\overline{X}$
2. Déterminer la probabilité que le bénéfice moyen sur 16 jours soit compris entre 1 225 et 1 375 euros

1. La variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

   Donc $\overline{X}$ suit la loi normale $N\left(1\ 300, \dfrac{200}{\sqrt{16}}\right)$.

   Donc la variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale $N(1\ 300, 50)$

Propriétés de l'espérance et de la variance

la variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale $N\,(1\ 300, 50)$
Déterminer la probabilité que le bénéfice moyen sur 16 jours soit compris entre 1 225 et 1 375 euros
$p(1225 \leq \overline{X} \leq 1375) =$ NormalFRép(1225,1375,1300,50)
$p(1225 \leq \overline{X} \leq 1375) = 0,9973$