Calcul intégral

I Définition

Définition 1 Intégrale d'une fonction

Soit f une fonction admettant, sur un intervalle I, F comme primitive.

Soit a et b deux réels quelconques de I.

On appelle **intégrale de a à b de f** le réel, $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$. On le note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

Ce réel est indépendant du choix de la primitive F de f.
a et b sont **les bornes de l'intégrale**.

Remarque

Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, x est « une variable muette », ce qui signifie que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \ldots$. Le $\mathrm{d}x$ ou $\mathrm{d}t$ détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction : x, ou t.

Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+4$

1. Déterminer un primitive de f sur $\mathbb{R}$
2. Compléter les calculs suivants afin d'obtenir la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^3 2x+4\,\mathrm{d}x$ puis une valeur approchée au centième.

$$\begin{aligned}\int_1^3 2x+4\,\mathrm{d}x &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_2^5 3x^2+4x-5\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle\int_1^3 \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

Utilisation de Xcas pour le calcul de primitive et d'intégrale

Calcul d'une primitive : → int(2*x+4,x)

$$\frac{2\cdot x^2}{2}+4\cdot x$$

Calcul de l'intégrale : → int(2*x+4,x,1,3)

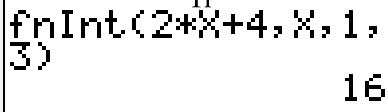
$$16$$

Utilisation de la calculatrice

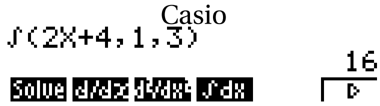
TI : $\boxed{\text{MATH}}$ **9 :fnInt(** fonction $\boxed{,}$ $\boxed{\text{x,t},\theta\text{,n}}$ $\boxed{,}$ borne inférieure $\boxed{,}$ borne supérieure $\boxed{)}$

Casio : $\boxed{\text{OPTN}}$ **:CALC** **$\int$ dx** fonction $\boxed{,}$ borne inférieure $\boxed{,}$ borne supérieure $\boxed{)}$

Ti



Casio



II Propriétés de l'intégrale

Propriété 1 Premières propriétés

$$\text{a) } \int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{b) } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Démonstration : appliquer la définition

Théorème 1 Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ et α et β deux réels.

$$\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 2 Un logiciel de calcul formel nous donne → `int(cos(x),x,0,pi/2)` 1

Calculer $6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{3}+4x^2\mathrm{d}x$

Théorème 2 Relation de Chasles

Soient f une fonction dérivable sur l'intervalle I et soit a, b et c trois éléments de I.

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème 3 Positivité de l'intégrale

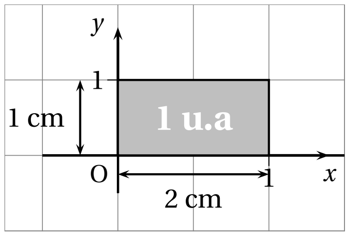
Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a\,;b]$ (donc $a \leq b$)

$$\text{Si pour tout } x \in [a\,;b],\ f(x) \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

III Interprétation graphique d'une intégrale, calcul d'aire

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Unité d'aire



Définition 2 Unitaire d'aire

L'unité d'aire est égale à l'aire d'un rectangle dont les cotés auraient pour dimension une unité sur chacun des axes du repère.

Pour notre exemple, l'unitaire d'aire est de ....

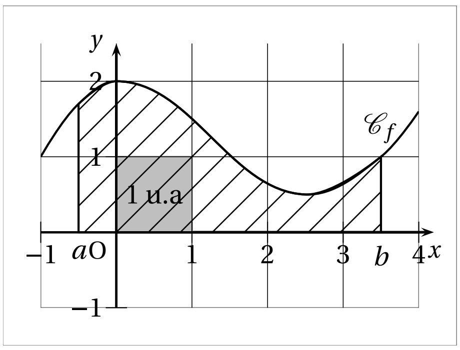
2 f est une fonction positive sur l'intervalle $[a; b]$

La courbe représentative de f sur l'intervalle $[a; b]$ est donc **au dessus** de l'axe des abscisses.

f est une fonction positive sur l'intervalle $[a; b]$

On note $\mathscr{A}$, l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de f, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathscr{A} \quad \text{u.a}$$



Exemple 3 On considère la fonction f paire, 6-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 0,5x \text{ si } 0 \leq x < 1,5 \\ f(x) = 0,75 \text{ si } 1,5 \leq x < 3 \end{cases}$

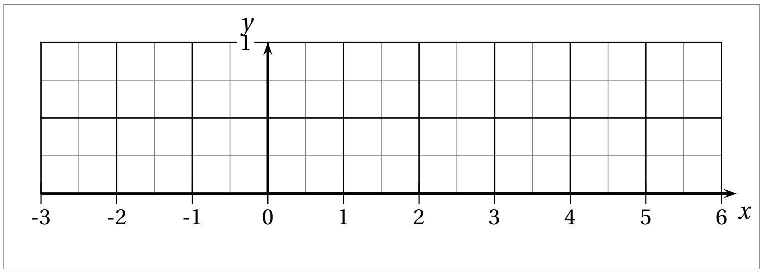
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$orthogonal d'unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, les axes du repère et la droite d'équation $x = 3$

1. (a) Calculer un primitive de la fonction $x \mapsto 0,5x$

   (b) En déduire $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$

   (c) En déduire l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}$, arrondi si nécessaire au mm^2 près

2. (a) Tracer dans le repère ci-contre la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ \ 6]$
   (b) Déterminer graphiquement la valeur de I
   (c) En déduire la valeur ou le calcul de l'aire du domaine $\mathscr{D}$



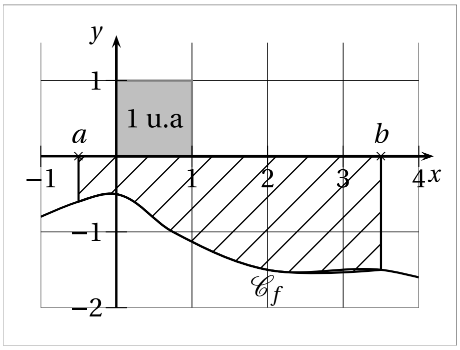
3 f est une fonction négative sur l'intervalle $[a;b]$

La courbe représentative de f sur l'intervalle $[a;b]$ est donc **en dessous** de l'axe des abscisses.

f est une fonction négative sur l'intervalle $[a;b]$

On note $\mathscr{A}$, l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de f, les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ et l'axe des abscisses.

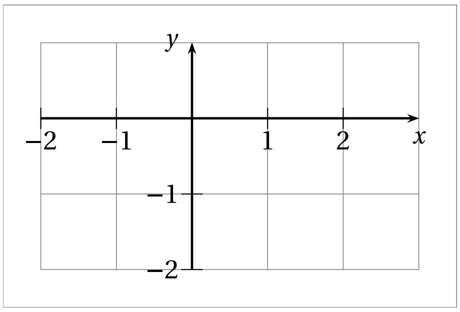
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathscr{A} \quad \text{u.a}$$



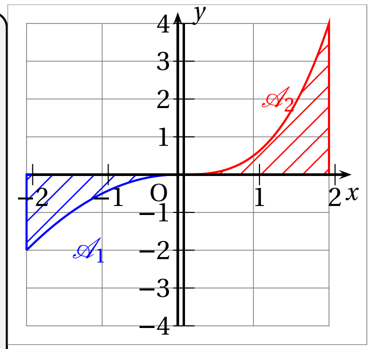
Exemple 4 Soit f la fonction 1-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\begin{cases} -2t \text{ si } 0<\leq t<1 \\ -1 \text{ si } t=1 \end{cases}$.

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$orthonormé. on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.

1. Calculer $I=\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2,3]$
3. Comment pouvait-on prévoir la valeur de I



4 f est une fonction changeant de signe sur l'intervalle $[a;b]$



Ai

f est une fonction changeant de signe sur l'intervalle $[a;b]$

On détermine les intervalles sur lesquels f est de signe constant.

- ➔ Calcul de l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ à l'aide d'aire de domaines.
  On utilise la relation de Chasles(Théorème II p.3) pour calculer l'intégrale sur chaque intervalle ou la fonction f est de signe constant.
- ➔ Calcul de l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses :
  L'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses est égale à la somme des aires sur les intervalles obtenus précédemment.

pour notre exemple, si on note

- $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine délimité par la courbe, les axes du repère et la droite d'équation $x = -2$
- $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine délimité par la courbe, les axes du repère et la droite d'équation $x = 2$.

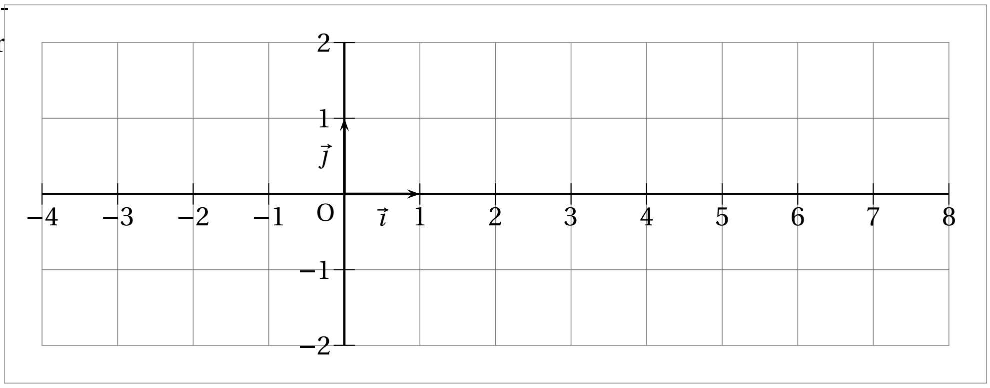
Alors

➔ $\int_{-2}^{2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-2}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{2} f(t)\mathrm{d}t = -\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$

➔ Soit $\mathscr{A}$, l'aire du domaine hachuré. $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Exemple 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire sur $\mathbb{R}$ et 4-périodique définie par $\begin{cases} f(x) = 2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = -2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Représenter la fonction sur le graphique ci-dessous et déterminer $\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$



IV Propriétés

Propriété 4 Intégrale et parité de f

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[-a\,;\,a]$ avec $a > 0$

- Si f est paire alors $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ et donc $\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x}$
- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ et donc $\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0}$
- Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors tout $a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

V Calcul de l'aire d'un domaine compris entre deux courbes

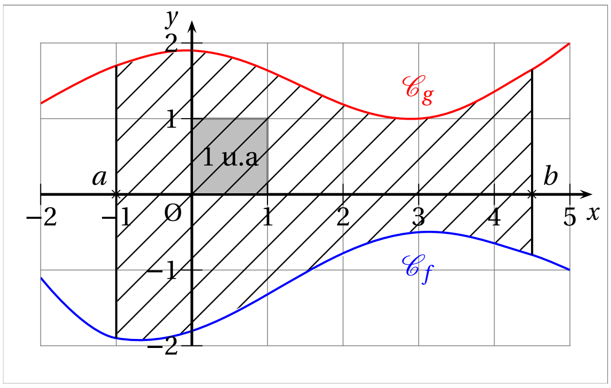
1 $f \leq g$ sur l'intervalle $[a; b]$

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Aire entre 2 courbes $f \leq g$

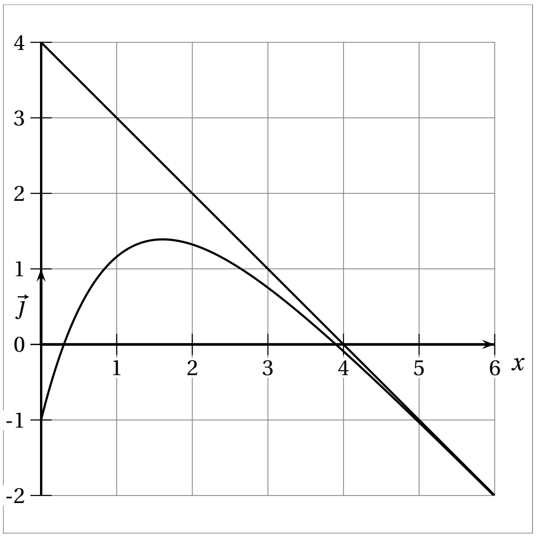
L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, et les courbes représentatives des deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[a; b]$ telles que pour tout x de $[a; b]$ $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$ est égale à :

$$\mathscr{A} = \int_{a}^{b} g(x) - f(x)\,dx.$$



Exemple 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x - 5e^{-x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$d'unité graphique 1 cm.

1. (a) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y = -x + 4$ est asymptote oblique
   (b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
2. Déterminer l'aire en cm^2 du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 5$. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au mm^2



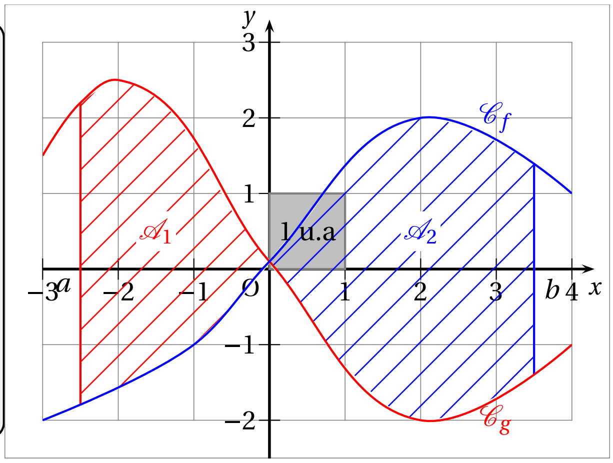
2 $g-f$ change de signe sur l'intervalle $[a;b]$

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$g-f$ **change de signe sur l'intervalle** $[a;c]$

- On détermine les points d'intersection des deux courbes
- On sépare le domaine en sous-domaines sur lesquels $g-f$ est de signe constant.

L'aire, exprimées en unités d'aire, du domaine délimités par les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ et les courbes représentatives des deux fonctions f et g est égale à la somme des aires des sous-domaines ainsi définis.



Pour notre exemple on a : $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$.

VI La valeur moyenne, valeur efficace

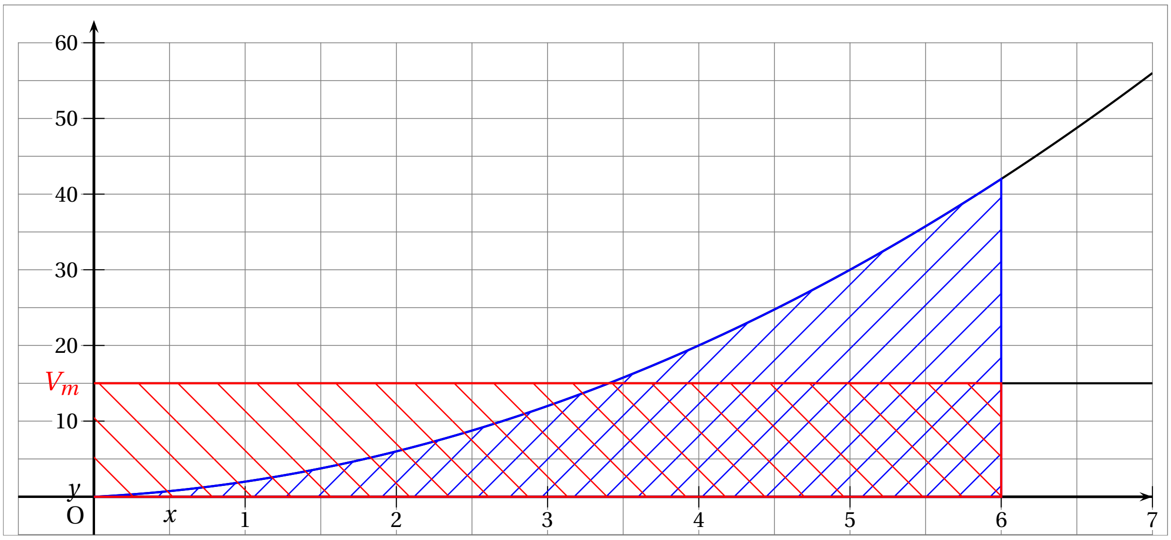
Définition 3 La valeur moyenne

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$. On appelle **valeur moyenne de** f **entre** a **et** b le réel V_m défini par :

$$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque

Soit f est une fonction positive, soit V_m sa valeur moyenne sur l'intervalle $[a;b]$. Alors l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de hauteur V_m et de largeur $(b-a)$



Exemple 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$

Définition 4 La valeur efficace

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$ La **valeur efficace** de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ est le nombre E tel que $\boxed{E^2 = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}$

Rappel

La valeur efficace est une quantité très utilisée en électricité. La tension qui est fournie par EDF est une tension non constante, alternative. Sa valeur suit la courbe de la fonction sinus. Pourtant, on nous dit que nous avons une tension de 220V (en fait, 230V maintenant). Cette valeur est la valeur efficace (sur une période) de la tension qui nous est fournie. Précisément, la valeur efficace d'une tension U est la valeur d'une tension continue qui produirait le même échauffement que U sur une résistance. Cette notion est celle qui est utilisée dans les calculs de puissance.

Exemple 8 Une résistance de 1 Ω est parcourue par un courant d'intensité $i(t) = I_m \sin(\omega t)$. Déterminer l'intensité efficace de ce courant sur une période donc sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{2\pi}{\omega}\right]$.

Rappel de cours;

Exercice 1 Centre étranger juin 2003 Comptabilité et Gestion, Informatique de gestion 4 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;9]$ par : $f(x) = \dfrac{-x^2+10x-9}{x}$.

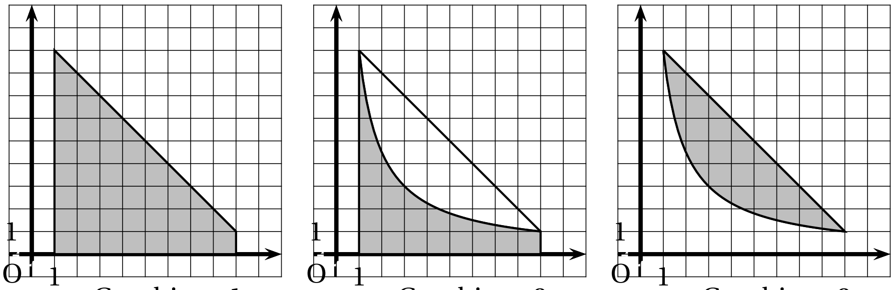
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2+10x-9=0$.
2. (a) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;9]$, on a : $f(x) = 10 - x - \dfrac{9}{x}$.

   (b) Calculer alors l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^9 f(x)\,\mathrm{d}x$ (donner la valeur exacte).

   (c) Montrer que I peut s'écrire sous la forme $a + b\ln 3$ où a et b sont deux nombres réels qu'il faut déterminer.
3. On a représenté sur chacun des graphiques ci-dessous les fonctions g et h définies sur l'intervalle $[1\,;9]$ par :

$$g(x) = 10 - x \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{9}{x}.$$

On a aussi grisé sur chacun des graphiques une partie du plan.



Graphique 1 Graphique 2 Graphique 3

On pose : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^9 \left(10 - x - \frac{9}{x}\right)\mathrm{d}x$, $\mathrm{J} = \displaystyle\int_1^9 (10-x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{K} = \displaystyle\int_1^9 \frac{9}{x}\,\mathrm{d}x$.

Pour chacune des trois questions, reporter sur la copie la réponse exacte (il y a une seule bonne réponse par ligne).

Q1	Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 1 ?	I	J	K
Q2	Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 2 ?	I	J	K
Q3	Quelle est l'intégrale qui permet de calculer l'aire hachurée sur le graphique 3 ?	I	J	K